

Aufgabenblatt 1

Abgabetermin: 17. Mai

Für die Zulassung zur Prüfung am Ende des Semesters müssen mindestens 50 % der Punkte bei den *schriftlich zu bearbeitenden* Aufgaben erreicht worden sein. Die Aufgaben sollen in Gruppen von zwei bis drei Personen bearbeitet und abgegeben werden. Diese Gruppen sollen über das ganze Semester gleich bleiben.

Die Abgabe der Lösungen (auf denen die Namen der Verfasser bitte deutlich zu erkennen sind) erfolgt jeweils in der Vorlesung zum angegebenen Abgabetermin.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Relationen (zwischen Menschen) auf Reflexivität, Irreflexivität, Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie.

- a) x kennt y
- b) x ist Geschwister von y
- c) x ist Vorfahr von y
- d) x ist gleich alt wie y
- e) x ist größer als y

Aufgabe 2

Überprüfen Sie die Korrektheit der folgenden Aussagen. Beweisen Sie Ihre Behauptung!
Sei R eine binäre Relation auf einer Menge A .

- a) Ist R reflexiv, so ist R nicht irreflexiv
- b) Ist R irreflexiv, so ist R nicht reflexiv
- c) R ist reflexiv genau dann, wenn R nicht irreflexiv ist

Aufgabe 3 (*schriftlich zu bearbeiten*, 4 Punkte)

Sei $R \subseteq A \times A$ eine transitive Relation. Zeigen Sie, dass R genau dann asymmetrisch ist, wenn R irreflexiv ist.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Relation

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$$

auf der Menge $\{a, b, c, d\}$.

Wieviele Elemente müssen zu dieser Relation jeweils mindestens hinzugefügt werden, damit man eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation bzw. eine Äquivalenzrelation auf $\{a, b, c, d\}$ erhält. (Die Elemente sind anzugeben).

Aufgabe 5

Die Verkettung der Relationen $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ ist definiert durch

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid \exists b \in A : (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2\}.$$

Sei nun A die Menge aller Menschen. R_1 bezeichne die Relation „ist verheiratet mit“, R_2 die Relation „ist Mutter von“ und R_3 die Relation „ist Kind von“.

Beschreiben Sie umgangssprachlich die folgenden Kompositionen:

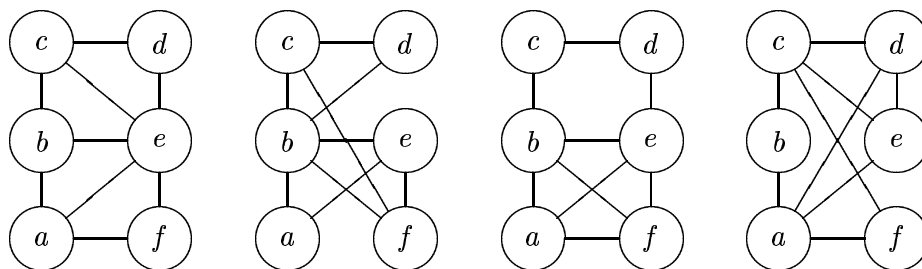
- $R_1 \circ R_2$
- $R_2 \circ R_1$
- $R_2 \circ R_3$
- $R_3 \circ R_2$
- $R_2 \circ R_1 \circ R_3$

Aufgabe 6 (schriftlich zu bearbeiten, 4 Punkte)

Beweisen Sie, dass R genau dann transitiv ist, wenn $R^2 \subseteq R$.

Aufgabe 7

Geben Sie die Gradsequenz der folgenden Graphen an. Welche der Graphen sind isomorph zueinander, welche nicht? (mit Begründung)



Aufgabe 8

- Sei $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Wieviele Kanten hat ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, wenn von jedem Knoten genau eine Kante wegführt?
- Wieviele verschiedene solche Graphen gibt es? Zeichnen Sie alle diese Graphen für $n = 2$.
- Wie ändert sich die Anzahl, wenn zusätzlich gefordert wird, dass jeder Knoten Eingangsgrad eins hat? Zeichnen Sie alle solchen Graphen für $n = 3$.

Aufgabe 9 (schriftlich zu bearbeiten, 4 Punkte)

Sei $V = \{1, 2, \dots, n\}$ und $k \geq 1$. Wieviele gerichtete Graphen $G = (V, E)$ mit $d_{out}(v) = k$ für alle Knoten $v \in V$ gibt es? ($d_{in}(v)$ ist beliebig.)

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass es in einer beliebigen Gruppe mit mindestens zwei Personen immer mindestens zwei gibt, die die gleiche Anzahl von Freunden (innerhalb der Gruppe) haben.