Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität II
Prof. Dr. Johannes Köbler

Theoretische Informatik III
Sommersemester 2001

Aufgabenblatt 2

Abgabetermin: 7. Juni

Aufgabe 11

Zeigen Sie:

a) $(R^T)^T = R$

b) $\overline{R}^T = \overline{R^T}$

c) $R \subseteq S \Leftrightarrow R^T \subseteq S^T$

d) $(R \cup S)^T = R^T \cup S^T$ und $(R \cap S)^T = R^T \cap S^T$

Aufgabe 12

Zeigen Sie:

a) Wenn die Relationen R und S reflexiv sind, dann sind ebenfalls die Relationen $R \cup S$ und $R \cap S$ reflexiv.

b) Wenn die Relationen R und S symmetrisch sind, dann sind ebenfalls die Relationen $R \cup S$ und $R \cap S$ symmetrisch.

Aufgabe 13 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

Die symmetrische Hülle einer Relation R auf einer Menge A ist definiert durch

$$h_{sym}(R) := \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ symmetrisch}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $h_{sym}(R)$ symmetrisch ist und somit die kleinste symmetrische Relation ist, die R enthält.

b) Zeigen Sie, dass gilt: $h_{sym}(R) = R \cup R^T$

Aufgabe 14

a) Bestimmen Sie die größte (bzgl. Mächtigkeit) symmetrische Relation, die in der Relation

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2)\}$$

(über $A = \{1,2,3,4\}$) enthalten ist.

b) Muss jede Relation eine größte transitive Relation enthalten? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 15 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

a) Sei R eine Relation auf einer n-elementigen Menge A. Zeigen Sie:

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i; \quad R^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} R^i.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Schubfachprinzip: Nach Verteilen von mehr als n Gegenständen auf n Schubfächer enthält mindestens ein Schubfach mehr als einen Gegenstand.

b) Zeigen Sie: R symmetrisch $\Rightarrow R^+, R^*$ symmetrisch.

Aufgabe 16

Sind mit E_1, E_2 auch $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2, E_1 \circ E_2$ Äquivalenzrelationen? Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bleiben erhalten, welche nicht? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 17 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

Gegeben sei folgende Relation

$$R = \{(2,4),(3,3),(3,6),(4,1),(4,2),(5,9),(7,5),(7,8),(8,5),(9,8)\}$$

auf der Menge $A = \{0,1,\ldots,9\}$. (Stellen Sie sich z.B. vor, 10 Personen wurden befragt, wer wen gut leiden kann.)

a) Welche der Eigenschaften Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie und Transitivität liegen vor, welche nicht?

b) Veranschaulichen Sie die Relationen R, R^T, $h_{refl}(R)$, $h_{sym}(R)$, R^2, R^3, R^+, R^* durch die zugehörigen gerichteten Graphen.