Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität II
Prof. Dr. Johannes Köbler

Theoretische Informatik III
Sommersemester 2001

Aufgabenblatt 3

Abgabetermin: 21. Juni

Aufgabe 18

a) Sei R eine binäre Relation auf der Menge A. Beschreiben Sie $h_{äq}(R)$ durch eine Kombination der Operatoren $h_{refl}(\cdot)$, $h_{sym}(\cdot)$, $(\cdot)^+$ und $(\cdot)^*$, wobei sie nicht alle Operatoren verwenden müssen. Geben Sie eine Begründung an.

b) Sei R eine transitive Relation. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$R^2 = \bigcup_{i=2}^{\infty} R^i$$

(Hinweis: Daraus folgt dann die Gleichung $R \cap \overline{R^2} = R \cap \overline{\bigcup_{i=2}^{\infty} R^i}$, d. h. bei Hasse-Diagrammen fehlen auch die Kanten, die zu Wegen der Länge größer als zwei korrespondieren, was durch die Definition ja nicht deutlich wird.)

c) Eine Relation R ist genau dann eine Ordnung auf A, wenn R^T eine Ordnung auf A ist. Beweisen Sie diese Aussage.

Aufgabe 19 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

Gegeben sei die Relation

$$R = \{(0,1), (0,2), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}^*$$

auf der Menge $A = \{0,1,2,3,4,5\}$.

a) Begründen Sie, dass R eine Ordnung ist und zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm.

b) Geben Sie die maximalen, minimalen, größten und kleinsten Elemente von A (bzgl. R) an.

c) Welche Teilmengen von A besitzen kein Supremum bzw. Infimum (bzgl. R)?

Aufgabe 20 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

Zeigen Sie die folgende Behauptung: Besitzt in einer Ordnung R jede zweielementige Teilmenge von A ein Supremum, so auch jede endliche Teilmenge $A' = \{a_1, \ldots, a_k\}$ von A und es gilt

$$\sup A' = \sup\{a_1, \sup\{a_2, \ldots \sup\{a_{k-1}, a_k\} \ldots\}\}.$$

Aufgabe 21

Sei $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } n\}$ und $R_n \subseteq A_n \times A_n$ die Teilbarkeitsrelation auf A_n, d. h. $xR_ny :\Leftrightarrow x|y$.

a) Zeigen Sie, dass $(A_n; R_n)$ eine Ordnung ist.

b) Zeichnen Sie die Hasse-Diagramme für $n = 2, 4, 6, 8, 12, 16$.

c) Begründen Sie, dass für beliebiges $2 \leq n \leq 23$ die Ordnung (A_n, R_n) zu einer der sechs Ordnungen in der vorigen Teilaufgabe isomorph ist. Was gilt für $n = 24$?

Aufgabe 22

Sei G ein Graph mit n Knoten. (Ein *Teilweg* w' eines Weges w ist ein Weg, der eine Teilfolge von w ist, d. h. ist $w = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, so besitzt w' die Form $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$, für geeignete i, j mit $1 \leq i \leq j \leq k$.) Zeigen Sie:

a) Ein Weg der Länge größer als $n - 1$ in G kann kein Pfad sein.

b) Jeder Weg in G, der kein Pfad ist, enthält einen Kreis als Teilweg.

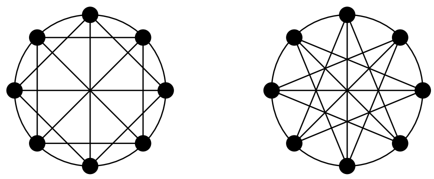
Aufgabe 23

Das *Komplement* $\overline{G} = (V, E')$ eines Graphen $G = (V, E)$ besitzt dieselbe Knotenmenge wie G und die Kantenmenge $E' = \{\{u, v\} \in V \times V \mid u \neq v \wedge \{u, v\} \notin E\}$.

a) Wieviele Kanten besitzt G, wenn G und $\overline{G}$ zueinander isomorph sind und jeweils n Knoten besitzen. (Geben sie eine Begründung an.)

b) Zeigen Sie, dass zwei Graphen G_1 und G_2 genau dann zueinander isomorph sind, wenn ihre Komplemente $\overline{G_1}$ und $\overline{G_2}$ zueinander isomorph sind.

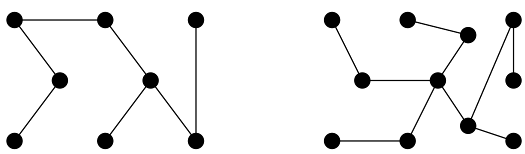
c) Sind die beiden dargestellten Graphen zueinander isomorph? Begründen Sie ihre Behauptung.



Aufgabe 24

Die *Exzentrizität* $e(v)$ eines Knotens v in einem Graphen ist gleich der Länge des längsten Pfades, der bei v endet. Das *Zentrum* eines Graphen besteht aus allen Knoten mit minimaler Exzentrizität.

a) Bestimmen Sie für die beiden im Folgenden abgebildeten Bäume die Exzentrizität aller Knoten und geben Sie jeweils das Zentrum an.



b) Von welchem Typ (Blatt oder innerer Knoten) sind die Knoten eines Baumes, die die größte Exzentrizität besitzen? Geben Sie eine Begründung an.

c) Beschreiben Sie (informal) einen effizienten Algorithmus, mit dem man das Zentrum eines Baumes bestimmen kann.

Aufgabe 25 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Zentrum eines Baumes immer aus einem oder zwei benachbarten Knoten besteht.