Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität II
Prof. Dr. Johannes Köbler

Theoretische Informatik III
Sommersemester 2001

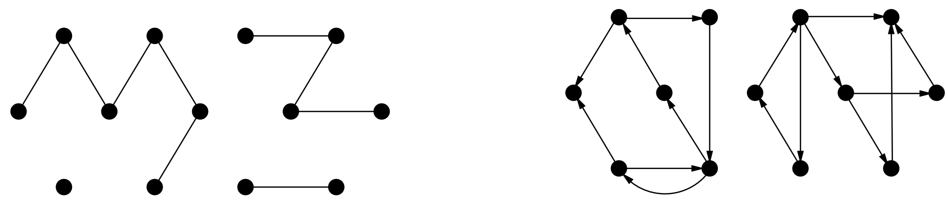
Aufgabenblatt 4

Abgabetermin: 5. Juli

Aufgabe 26

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten durch einen Weg miteinander verbunden sind. Die maximalen (bzgl. Teilgraphenordnung) zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen bezeichnen wir als die *Zusammenhangskomponenten* dieses Graphen. Ein gerichteter Graph heißt *stark zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten in beide Richtungen durch einen Weg miteinander verbunden sind und *schwach zusammenhängend*, wenn der Graph, der entsteht, indem wir alle gerichteten Kanten durch ungerichtete Kanten ersetzen, zusammenhängend ist. Die *starken Zusammenhangskomponenten* eines gerichteten Graphen sind die maximal stark zusammenhängenden Teilgraphen dieses gerichteten Graphen. Analog definieren wir die *schwachen Zusammenhangskomponenten.*

a) Geben Sie die Zusammenhangskomponenten des folgenden Graphen und die starken und schwachen Zusammenhangskomponenten des folgenden gerichteten Graphen an.



b) Betrachten Sie die Relation Z, wobei xZy genau dann gilt, wenn x und y in derselben Zusammenhangskomponente liegen. Diese Relation sei entsprechend für starke und schwache Zusammenhangskomponenten definiert. Wie lässt sich Z (für alle drei Fälle) durch die Kantenrelation E ausdrücken? Definieren Sie auf diese Weise formal die Zusammenhangskomponenten eines Graphen und die starken und schwachen Zusammenhangskomponeten eines gerichteten Graphen. Geben Sie eine Begründung an.

Aufgabe 27 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Sei G ein unzusammenhängender Graph. Dann ist der Graph $\overline{G}$ zusammenhängend (zur Definition von $\overline{G}$ siehe letztes Übungsblatt).

b) Sei G ein Graph. Wenn G isomorph zu $\overline{G}$ ist, dann ist G zusammenhängend.

Aufgabe 28

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit n Knoten. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Jeder Teilgraph G' von G ist zusammenhängend. (Ein Graph $G' = (V', E')$ ist *Teilgraph* von G, falls $V(E') \subseteq V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt, wobei $V(E')$ die Menge der Endknoten der Kanten in E' ist.)

b) Es existiert ein Baum $B = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$.

c) G besitzt mindestens $n - 1$ Kanten.

d) Wenn G aus genau $n - 1$ Kanten besteht, dann ist G ein Baum.

e) Falls der Grad aller Knoten von G mindestens zwei ist, dann besitzt G einen Kreis.

f) Falls der Grad aller Knoten von G mindestens zwei ist, dann liegt jeder Knoten von G auf einem Kreis.

Aufgabe 29

Geben Sie jeweils mit Begründung einen Graphen mit der angegebenen Eigenschaft an.

a) Ein Graph, der keinen Hamiltonkreis und keinen Eulerkreis besitzt.

b) Ein Graph, der einen Hamiltonkreis und keinen Eulerkreis besitzt.

c) Ein Graph, der keinen Hamiltonkreis und einen Eulerkreis besitzt.

d) Ein Graph, der einen Hamiltonkreis und einen Eulerkreis besitzt.

Aufgabe 30 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

Sei G ein zusammenhängender Graph. Ein *Eulerscher Weg* ist ein Weg, der jede Kante von G genau einmal enthält (wobei Start- und Zielknoten nicht identisch sein müssen). Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Eulerschen Weges in G an und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 31 (*schriftlich zu bearbeiten,* 4 Punkte)

Verallgemeinern Sie den Satz von Euler auf beliebige (auch unzusammenhängende) planare Graphen und geben Sie einen Beweis für Ihre Behauptung an.

Aufgabe 32

In der Arche stand Noah vor gewissen Unterbringungsproblemen. Insbesondere hatte er nur noch 3 Ställe übrig, musste aber noch die Krokodile, Piranhas, Tiger, Löwen, Biber, Einhörner und Tauben unterbringen. Natürlich darf man die Krokodile nicht mit Tiger, Löwen, Bibern, Einhörnern oder Tauben zusammen unterbringen, und gleiches gilt für die Piranhas (mit Ausnahme der Tauben). Tiger und Löwen sind ihrerseits unverträglich zu Bibern und Einhörnern, Löwen auch noch zu Tauben. Darüberhinaus dürfen Biber und Einhörner auch nicht zu lange zusammen sein (da die Biber das Horn annagen könnten).

Machen Sie aus obiger Beschreibung ein graphentheoretisches Problem und erläutern Sie, warum es keine Einhörner mehr gibt.

Aufgabe 33

a) Sind alle 4-färbbaren Graphen planar? Beweisen Sie ihre Behauptung.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem man überprüfen kann, ob ein Graph bipartit, d. h. 2-färbbar, ist. (Hinweis: Was muss für zwei benachbarte Knoten auf jeden Fall gelten?)

c) Was ist die chromatische Zahl eines Baumes? Geben Sie einen Beweis an.