

Aufgabenblatt 5

Abgabetermin: 19. Juli

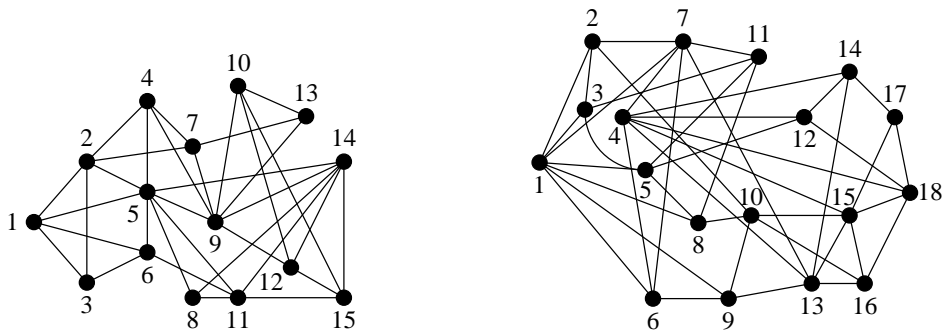
Aufgabe 34 (schriftlich zu bearbeiten, 4 Punkte)

Definition: Sei G ein Graph. Sei v ein Knoten mit Grad zwei in G mit den beiden Nachbarknoten u und w . Durch *Überbrückung* von v entsteht der Graph $G' := (G - \{v\}) \cup \{\{u, w\}\}$, bei dem gegenüber G der Knoten v und die Kanten $\{u, v\}$ und $\{v, w\}$ fehlen und die Kante $\{u, w\}$ enthalten ist.

Definition: Seien G und H Graphen. Dann bezeichnen wir G als *Unterteilung* von H , wenn durch sukzessives Überbrücken von Knoten mit Grad zwei aus G ein Graph G' erzeugt werden kann, der zu H isomorph ist.

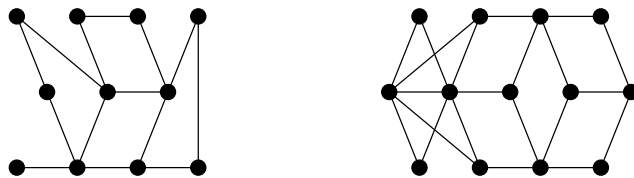
Satz (Kuratowski): Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung des $K_{3,3}$ und K_5 als Teilgraph besitzt.

Sind die folgenden Graphen planar? Geben Sie eine Begründung unter Benutzung des vorigen Satzes an. (Verwenden Sie dabei die vorgegebene Nummerierung der Knoten.)



Aufgabe 35 (schriftlich zu bearbeiten, 4 Punkte)

a) Sind die folgenden Graphen bipartit, d. h. 2-färbbar? Begründen Sie Ihre Behauptung.



b) Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Aufgabe 36

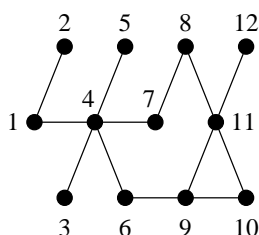
Im Folgenden betrachten wir den Tiefensuche-Algorithmus. Vor dem ersten Aufruf von TIEFENSUCHE haben alle Knoten die Farbe weiss. Die Prozedur TIEFENSUCHE wird mit einem Graphen und einem (beliebigen) Knoten dieses Graphen aufgerufen.

```

TIEFENSUCHE( $G, v$ )
   $Farbe[v] \leftarrow$  grau
  foreach  $u \in V$  : es gibt eine Kante von  $v$  nach  $u$  do
    if  $Farbe[u] =$  weiss then
      TIEFENSUCHE( $G, u$ )
   $Farbe[v] \leftarrow$  schwarz

```

- a) Geben Sie für den folgenden Graphen die Reihenfolge an, in der die Knoten (und Kanten) bei einer Tiefensuche beginnend bei Knoten 1 durchlaufen werden. Bei Wahlmöglichkeit soll zunächst der Nachbarknoten mit der kleinsten Nummer gewählt werden.

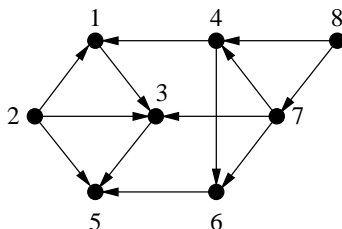


- b) Woran kann man bei einer Tiefensuche am Beispielgraphen der letzten Teilaufgabe erkennen, dass der Graph einen Kreis enthält? (Hinweis: Welche Farbe besitzt der Knoten, bei dem sich während der Tiefensuche ein Kreis schließt?)
- c) Was bedeuten die Farben weiss, grau und schwarz im Verlauf des Algorithmus? Gehen Sie dabei sowohl auf Graphen, als auch auf gerichtete Graphen ein.
- d) Wie kann man bei Graphen und gerichteten Graphen also mittels Tiefensuche erkennen, dass ein Kreis enthalten ist?

Aufgabe 37 (schriftlich zu bearbeiten, 4 Punkte)

Definition: Eine *topologische Sortierung* eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Anordnung $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$ seiner Knoten $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, so dass für alle Kanten (v_{i_j}, v_{i_k}) gilt $j < k$.

- a) Geben Sie eine topologische Sortierung der Knoten des folgenden gerichteten Graphen an.



- b) Welchen Typ (bzgl. Eingangsgrad) besitzt der Knoten, der in der topologischen Sortierung der vorigen Teilaufgabe am Anfang steht? Warum muss das so sein?
- c) Zeigen Sie, dass ein gerichteter Graph G genau dann eine topologische Sortierung besitzt, wenn er azyklisch, d. h. kreisfrei, ist.