Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität II
Prof. Dr. Johannes Köbler

Lösung zur Probeklausur Theoretische Informatik III

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$ und $R \subseteq A \times A$ mit $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (4,5), (6,7), (7,7), (7,8)\}$.

a) (2 Punkte) Zeichnen Sie den gerichteten Graphen (A, R).

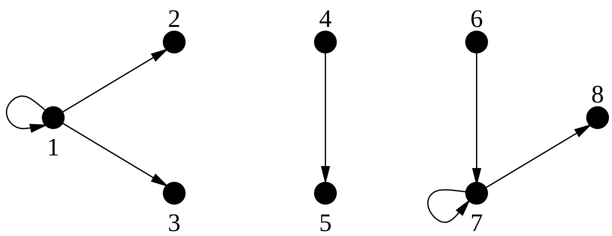
b) (6 Punkte) Geben Sie die Relation $h_{äq}(R)$ an und zeichnen Sie den gerichteten Graphen $(A, h_{äq}(R))$.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Menge $A/h_{äq}(R)$.

d) (2 Punkte) Sei $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie eine Äquivalenzrelation $S \subseteq B \times B$ an, so dass $B/S = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ gilt, und zeichnen Sie den gerichteten Graphen (B, S).

Lösung zu Aufgabe 1

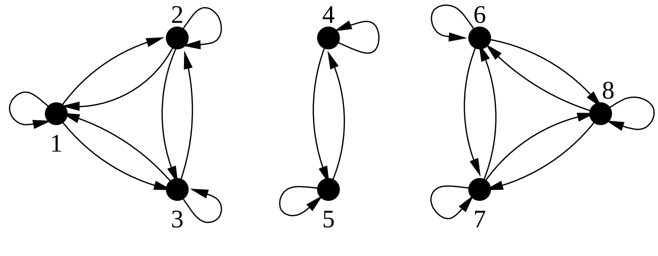
a) Im Folgenden ist der gerichtete Graph (A, R) abgebildet:



b)

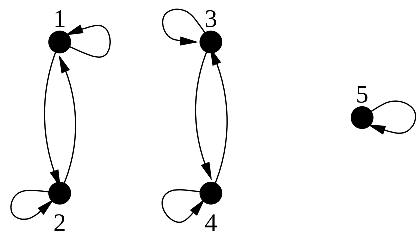
$$h_{äq}(R) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (6,6), (6,7), (6,8), (7,6), (7,7), (7,8), (8,6), (8,7), (8,8)\}$$

In der folgenden Abbildung ist der gerichtete Graph $(A, h_{äq}(R))$ dargestellt:



c) $A/h_{äq}(R) = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$

d) $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,5)\}$ und in der folgenden Abbildung ist der gerichtete Graph (B, S) zu sehen:



Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei R eine reflexive Relation auf A, so dass für alle $a, b, c \in A$ gilt: aus aRb und aRc folgt bRc. Zeigen Sie, dass R dann eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung zu Aufgabe 2
Nach Voraussetzung ist die Relation R reflexiv und es gilt:

$$\forall a, b, c \in A : aRb \wedge aRc \to bRc$$

Wir sollen nun zeigen, dass R eine Äquivalenzrelation ist, d. h., dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

(i) R ist nach Voraussetzung reflexiv.

(ii) Seien $x, y \in A$ beliebig. Dann gilt xRx wegen der Reflexivität von R. Somit folgt aus xRy (und xRx) nach Voraussetzung yRx. Die Relation R ist also symmetrisch.

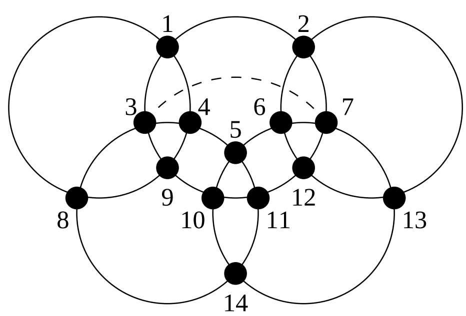
(iii) Seien $x, y, z \in A$ beliebig. Wenn gilt $xRy \wedge yRz$, dann folgt $yRx \wedge yRz$, da R symmetrisch ist. Nach Voraussetzung ergibt sich dann also xRz. Somit ist R transitiv.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz $h_{äq}(R) = h_{sym}(R^*)$ im Allgemeinen nicht gilt.

Lösung zu Aufgabe 3
Für die Relation $R = \{(1,2),(1,3)\}$ auf der Trägermenge $A = \{1,2,3\}$ gilt diese Äquivalenz beispielsweise nicht.

$$\begin{aligned} R^* &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\} \\ h_{sym}(R^*) &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\} \\ h_{äq}(R) &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (30 Punkte)
Betrachten Sie folgenden Graphen G ohne die gestrichelte Kante.



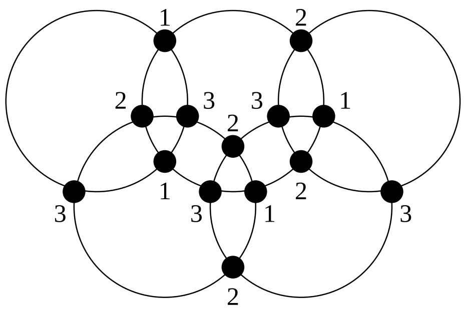
a) (7 Punkte) Geben Sie mit Begründung die chromatische Zahl von G an.

b) (7 Punkte) Finden Sie einen Eulerkreis in G. Geben Sie als Lösung den Eulerkreis als Knotenfolge an.

c) (16 Punkte) Ist G mit der gestrichelten Kante zwischen den Knoten 3 und 7 planar? Begründen Sie ihre Behauptung unter Verwendung des Satzes von Kuratowski.

Lösung zu Aufgabe 4

a) In dem folgenden Graphen stellen die Zahlen an den Knoten die Farben einer 3-Färbung von G dar.



Da der Graph G beispielsweise das Dreieck $(1,3,4,1)$ enthält, kann er nicht zweifärbbar sein. Somit ist $\chi(G) = 3$.

b) Der folgende Weg ist ein Eulerkreis in G:

$$(1, 8, 14, 13, 2, 7, 13, 12, 7, 6, 12, 11, 14, 10, 11, 5, 10, 9, 8, 3, 9, 4, 3, 1, 4, 5, 6, 2, 1)$$

c) Der Graph G mit der gestrichelten Kante ich nicht planar, da er eine Unterteilung des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält (links in der folgenden Abbildung). Außerdem enthält G mit der gestrichelten Kante auch eine Unterteilung des K_5 als Teilgraph (rechts in der folgenden Abbildung).