Vorlesungsskript

Theoretische Informatik III

Sommersemester 2001

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Algorithmen und Komplexität II

30. Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Relationalstrukturen

Sei A eine nichtleere Menge, R_i eine k_i-stellige Relation auf A, d.h. $R_i \subseteq A^{k_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt $(A; R_1, \ldots, R_n)$ ***Relationalstruktur***. Die Menge A heißt der ***Individuenbereich*** oder die ***Trägermenge*** der Relationalstruktur.

Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten. Man nennt dann R eine ***(binäre) Relation auf*** A.

Beispiel

a) (F, M) mit $F := \{f \mid f$ ist Fluss in Europa$\}$ und
$M := \{(f, g) \in A \times A \mid f$ mündet in $g\}$.

b) (U, B) mit $U := \{x \mid x$ ist Berliner $\}$ und
$B := \{(x, y) \in U \times U \mid x$ ist Bruder von $y\}$.

c) $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge einer beliebigen Menge M und $\subseteq$ die Inklusionsbeziehung auf den Teilmengen von M ist.

d) (A, Id_A), wobei $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ die ***Identität auf*** A ist.

e) $(\mathbb{R}, \leq)$.

f) $(\mathbb{Z}, |)$, wobei $|$ die "teilt"-Relation bezeichnet.

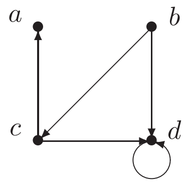
g) $(\mathcal{F}ml, \Rightarrow)$ mit $\mathcal{F}ml := \{F \mid F$ ist aussagenlogische Formel$\}$ und
$\Rightarrow = \{(F, G) \in \mathcal{F}ml \times \mathcal{F}ml \mid G$ ist aussagenlogische Folgerung von $F\}$.

Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die ***Infix***-Schreibweise aRb benutzt.

1.1 Darstellung endlicher Relationen

1.1.1 Graphische Darstellung

Eine Relation R auf einer endlichen Menge A kann durch einen ***gerichteten Graphen*** $G = (A, R)$ mit ***Knotenmenge*** A und ***Kantenmenge*** R veranschaulicht werden. Hier-zu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil). Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen ***adjazent*** (benachbart).



Der ***Ausgangsgrad*** eines Knotens $x \in V$ ist $d_{out}(x) = \|R(x)\|$, wobei $R(x) = \{y \in V \mid xRy\}$ der ***Nachbereich*** von x ist. Entsprechend ist $d_{in}(x) = \|\{y \in V \mid yRx\}\|$ der ***Eingangsgrad*** von x. Falls R symmetrisch (siehe unten) ist, können die Pfeilspitzen auch weggelassen werden. In diesem Fall ist $d(x) = d_{in}(x) = d_{out}(x)$ der ***Grad*** von x. Ist die zugrundeliegende Relation R zudem irreflexiv, so erhalten wir einen (schleifenfreien) ***Graphen***.

1.1.2 Matrixdarstellung (Adjazenzmatrix)

Eine Relation R auf einer endlichen (geordneten) Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ läßt sich durch eine boolesche $n \times n$-Matrix $M_R = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen. Beispielsweise hat die Relation

$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$

auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Tabellendarstellung (Adjazenzliste)

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine endliche Relation R in Form einer Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seinen Nachbereich $R(x)$ in Form einer Liste zuordnet:

x	$R(x)$
a	-
b	c, d
c	a, d
d	d

1.2 Operationen auf Relationen

Da Relationen Mengen sind, sind auf ihnen die mengentheoretischen Operationen ***Durchschnitt***, ***Vereinigung***, ***Komplement*** und ***Differenz*** definiert. Seien R und S Relationen auf A, dann ist

$$\begin{array}{ccl} R \cap S & = & \{(x,y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\}, \\ R \cup S & = & \{(x,y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\}, \\ \overline{R} & = & \{(x,y) \in A \times A \mid \neg xRy\}, \\ R - S & = & \{(x,y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\} \end{array}$$

und $R \subseteq S$ bedeutet

$$\forall x, y : xRy \Rightarrow xSy.$$

Weiterhin ist für eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ von Relationen auf A der ***Schnitt über*** $\mathcal{M}$ und die ***Vereinigung über*** $\mathcal{M}$ wieder eine Relation auf A.

$$\begin{array}{ccl} \bigcap \mathcal{M} & = & \{(x,y) \mid \text{ für jede Relation } R \in \mathcal{M} \text{ gilt } xRy\} \\ \bigcup \mathcal{M} & = & \{(x,y) \mid \text{ es gibt eine Relation } R \in \mathcal{M} \text{ mit } xRy\} \end{array}$$

Die ***transponierte (konverse) Relation*** zu R ist

$$R^T := \{(y,x) \mid xRy\}.$$

R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet. Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.

Sei R eine Relation auf A. Dann heißt R

reflexiv,	falls xRx für alle $x \in A$ gilt (d.h. $Id_A \subseteq R$),
irreflexiv,	falls $\neg xRx$ für alle $x \in A$ gilt (d.h. $Id_A \subseteq \overline{R}$),
symmetrisch,	falls $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in A$ gilt (d.h. $R \subseteq R^T$),
asymmetrisch,	falls $xRy \Rightarrow \neg yRx$ für alle $x, y \in A$ gilt (d.h. $R \subseteq \overline{R^T}$),
antisymmetrisch,	falls $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$ gilt (d.h. $R \cap R^T \subseteq Id$),
konnex,	falls $xRy \vee yRx$ für alle $x, y \in A$ gilt (d.h. $A \times A \subseteq R \cup R^T$),
semikonnex,	falls $x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$ für alle $x, y \in A$ gilt (d.h. $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$).

Beispiel

a) Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.

b) $(\mathbb{R}, <)$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex.

c) $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. $(\mathbb{R}, \leq)$ ist konnex, $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist im Fall $\|M\| \leq 1$ konnex, aber im Fall $\|M\| \geq 2$ weder semikonnex noch konnex.

Eine wichtige zweistellige Operation auf der Menge $\mathcal{P}(A \times A)$ aller Relationen auf A ist das Relationenprodukt (auch Komposition genannt).

Das ***Produkt*** zweier Relationen R und S auf A ist

$$R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y : xRy \wedge ySz\}.$$

Übliche Bezeichnungen für das Relationenprodukt sind auch $R\,;S$ und $R \cdot S$ oder einfach RS. Für $\underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{\text{n-mal}}$ wird auch R^n geschrieben.

Achtung: Das n-fache Relationenprodukt von R darf nicht mit dem n-fachen kartesischen Produkt der *Menge* R verwechselt werden. Wir vereinbaren, dass R^n das n-fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Beispiel

a) Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Relation "ist Onkel von".

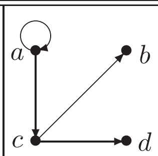
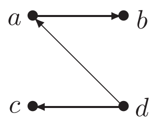
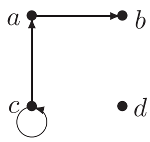
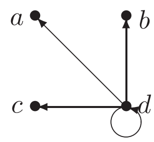
b) Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$-Matrizen für R und S, so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} := \bigvee_{k=1,\ldots,n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

Der Nachbereich $R \circ S\,(x)$ von x bzgl. $R \circ S$ berechnet sich zu

$$R \circ S\,(x) = \bigcup\{S(y) \mid y \in R(x)\}.$$

Als Beispiel betrachten wir auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ die Relationen $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d)\}$ und $S = \{(a, b), d, a), d, c)\}$.

Relation	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
Graph				
Adjazenz-matrix	$\begin{pmatrix} 1010 \\ 0000 \\ 0101 \\ 0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0100 \\ 0000 \\ 0000 \\ 1010 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0100 \\ 0000 \\ 1010 \\ 0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 1111 \end{pmatrix}$
Adjazenz-liste	$a:$ a, c $b:$ - $c:$ b, d $d:$ -	$a:$ b $b:$ - $c:$ - $d:$ a, c	$a:$ b $b:$ - $c:$ a, c $d:$ -	$a:$ - $b:$ - $c:$ - $d:$ a, b, c, d

Beobachtung: Das Relationenprodukt ist nicht kommutativ, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Satz 1.1 *Seien Q, R, S Relationen auf A. Dann gilt*

$i)$ $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, *d.h. $\circ$ ist assoziativ,*

$ii)$ $Id \circ R = R \circ Id = R$, *d.h. Id ist neutrales Element.*

Beweis:

$$i) \quad \begin{aligned} x\,(Q \circ R) \circ S\; y &\Leftrightarrow \exists u \in A : x\,(Q \circ R)\; u \;\wedge\; u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists u \in A : (\exists v \in A : x\,Q\,v\,R\,u) \;\wedge\; u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists u, v \in A : x\,Q\,v\,R\,u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists v \in A : x\,Q\,v \;\wedge\; (\exists u \in A : v\,R\,u \;\wedge\; u\,S\,y) \\ &\Leftrightarrow \exists v \in A : x\,Q\,v\,(R \circ S)\;y \\ &\Leftrightarrow x\,Q \circ (R \circ S)\;y \end{aligned}$$

$$ii) \quad x\,Id \circ R\;y \Leftrightarrow x = x\;R\;y \Leftrightarrow x\;R\;y \Leftrightarrow xRy = y \Leftrightarrow x\;R \circ Id\;y.$$

□

Eine über das Relationenprodukt charakterisierbare Eigenschaft ist die Transitivität.

Definition 1.2 *Eine Relation auf A heißt **transitiv**, falls für alle $x, y, z \in A$ gilt:*

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$$

Satz 1.3 *R ist genau dann transitiv, wenn $R^2 \subseteq R$ gilt (siehe Übungen).*

Es läßt sich leicht nachprüfen, dass der Schnitt über eine Menge transitiver Relationen wieder transitiv ist, d.h. es existiert zu jeder Relation R auf einer Menge A eine kleinste, R umfassende transitive Relation.

Die Relation

$$R^+ := \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S,\ S \text{ transitiv}\}$$

heißt die ***transitive Hülle*** von R und

$$R^* := \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S,\ S \text{ reflexiv und transitiv}\}$$

heißt die ***reflexiv-transitive Hülle*** von R.

Satz 1.4

$i)$ $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i,$

$ii)$ $R^* = \bigcup_{i \geq 0} R^i,$ *wobei* $R^0 := Id.$

Beweis: siehe Übungen.

1.3 Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die in diesem Abschnitt behandelten Relationalstrukturen.

	refl.	sym.	trans.	asym.	antisym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrel.	$\surd$	$\surd$	$\surd$				
(Halb-)Ordnung	$\surd$		$\surd$		$\surd$		
Striktordnung			$\surd$	$\surd$			
lineare Ord.			$\surd$		$\surd$	$\surd$	
lin. Striktord.			$\surd$	$\surd$			$\surd$
schwache Ord.			$\surd$			$\surd$	
Quasiordnung	$\surd$		$\surd$				

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "$\surd$" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass gleichzeitig auch noch weitere Eigenschaften vorliegen.

Als erstes wenden wir uns den ***Äquivalenzrelationen***, d.h. reflexiven, symmetrischen und transitiven Relationen zu.

Beispiele für Äquivalenzrelationen

a) Auf der Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ die Parallelität, deren Äquivalenzklassen aus jeweils allen Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung) bestehen.

b) Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie", d.h. alle Menschen eines Jahrgangs stehen in Relation zueinander.

c) Auf $\mathbb{Z}$ die Restgleichheit bei Division durch eine feste ganze Zahl m. Hierdurch werden die ganzen Zahlen in die m Restklassen modulo m unterteilt.

d) Auf der Menge aller aussagenlogischen Formeln die semantische Äquivalenz.

Die kleinste Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist die Identität Id_M, die größte die Allrelation $M \times M$. Im Falle der Identität enthält jede Äquivalenzklasse nur ein Element, d. h. $M/Id_M = \{\{x\} \mid x \in M\}$. Im Falle der Allrelation $M \times M$ gibt es nur eine Äquivalenzklasse M, d.h. $M/(M \times M) = \{M\}$. Sind allgemein E_1, E_2 zwei Äquivalenzrelationen auf M mit $E_1 \subseteq E_2$, so ist jede Äquivalenzklasse von E_1 in einer Äquivalenzklasse von E_2 enthalten, d.h. jede Äquivalenzklasse von E_2 ist die Vereinigung von Äquivalenzklassen von E_1. Man sagt auch, E_1 bewirkt eine "feinere" Klasseneinteilung als E_2. Demnach ist die Identität die feinste und die Allrelation die gröbste Äuivalenzrelation.

Äquivalenzrelationen haben eine übersichtliche mengentheoretische Interpretation. Sie bewirken nämlich eine Klasseneinteilung (Partition) des zugrundeliegenden Individuenbereichs.

Sei M eine Menge. Eine Familie $\{M_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Mengen $M_i \subseteq M$ heißt ***Partition*** von M, falls gilt:

a) $M = \bigcup_{i \in I} M_i$, d.h. die Mengen M_i überdecken M.

b) Für $i, j \in I$ mit $M_i \neq M_j$ ist $M_i \cap M_j = \emptyset$, d.h. die Mengen M_i sind paarweise disjunkt.

Wie der nächste Satz zeigt, beschreiben Äquivalenzrelationen auf M und Partitionen von M den selben Sachverhalt.

Satz 1.5 *R ist genau dann eine Äquivalenzrelation auf M, wenn eine Partition $\{M_i \mid i \in I\}$ von M existiert mit*

$$xRy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in M_i. \qquad (*)$$

Gilt $M_i \neq M_j$ für $i \neq j$, so wird die Mächtigkeit von I auch der ***Index*** der Relation R genannt.

Beweis: Man sieht unmittelbar, dass bei gegebener Partition $\{M_i \mid i \in I\}$ von M die gemäß $(*)$ definierte Relation R eine Äquivalenzrelation ist.

Für die umgekehrte Richtung können wir aufgrund der Reflexivität von R eine minimale Menge $V \subseteq M$ wählen, so dass für jedes $x \in M$ ein $v \in V$ mit vRx existiert (V wird ein ***Vertretersystem*** von M genannt). Wie die folgenden Überlegungen zeigen, ist dann die Menge $\{R(v) \mid v \in V\}$ eine Partition von M, die $(*)$ erfüllt.

Da zu jedem $x \in M$ ein $v \in V$ mit vRx existiert, bildet die Familie $\{R(x) \mid x \in V\}$ eine exakte Überdeckung von M.

Sei nun $R(x) \cap R(y) \neq \emptyset$, d.h. es gibt ein $z \in R(x) \cap R(y)$. Für dieses z gilt also $xRz \wedge yRz$. Da R symmetrisch und transitiv ist, folgt daraus xRy, was wegen

$$u \in R(x) \Leftrightarrow xRu \overset{xRy}{\Leftrightarrow} yRu \Leftrightarrow u \in R(y)$$

die Gleichheit von $R(x)$ und $R(y)$ nach sich zieht. ■

Den bzgl. einer Äquivalenzrelation E zu x gehörigen Nachbereich $E(x)$ nennt man ***die von x repräsentierte Äquivalenzklasse*** und bezeichnet sie mit $[x]_E$. Die durch E auf M induzierte Partition $\{[x]_E \mid x \in M\}$ wird ***Quotienten- oder Faktormenge*** genannt und mit M/E bezeichnet.

Da der Schnitt über eine Menge von Äquivalenzrelationen wieder eine Äquivalenzrelation ist, können wir für eine beliebige Relation R auf einer Menge A die kleinste R umfassende Äquivalenzrelation

$$h_{\text{äq}}(R) := \bigcap\{E \subseteq A \times A \mid R \subseteq E,\ E \text{ ist eine Äquivalenzrelation}\}$$

definieren.

Als nächstes betrachten wir ***Ordnungen***, d.h. reflexive, antisymmetrische und transitive Relationen; auch ***(reflexive) Halbordnungen*** oder ***partielle Ordnungen*** genannt.

Beispiele für Ordnungen

a) $(\mathcal{P}(M); \subseteq),\ (\mathbb{Z}, \leq),\ (\mathbb{N}, |)$.

b) Auf der Menge $\mathcal{A}(M)$ aller Äquivalenzrelationen auf M die Relation "feiner als". Dabei ist, wie wir gesehen haben, E_1 feiner als E_2, falls E_1 in E_2 enthalten ist. In diesem Fall bewirkt E_1 eine feinere Klasseneinteilung auf M als E_2, da jede Äquivalenzklasse von E_1 in einer Äquivalenzklasse von E_2 enthalten ist.

c) Ist R eine Ordnung auf A und $B \subseteq A$, so ist $R \cap (B \times B)$ eine Ordnung auf B (die ***Einschränkung*** von R auf B). Beispielsweise ist $(\mathcal{A}(M); \subseteq)$ die Einschränkung von $(\mathcal{P}(M \times M); \subseteq)$ auf $\mathcal{A}(M)$.

Wir untersuchen nun den Bezug zu ***Striktordnungen***, d.h. transitiven und asymmetrischen Relationen.

Zu den Ordnungen $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$ und $(\mathbb{Z}; \leq)$ gehören die Striktordnungen $(\mathcal{P}(M); \subsetneq)$ und $(\mathbb{Z}; <)$. Der nächste Satz zeigt, dass ganz allgemein zu jeder Ordnung eine Striktordnung und umgekehrt zu jeder Striktordnung eine Ordnung gehört.

Satz 1.6 *Falls R eine Striktordnung ist, ist $R \cup Id$ eine Ordnung. Falls R eine Ordnung ist, ist $R \setminus Id$ eine Striktordnung.*

Bemerkung 1 *Der leichteren Lesbarkeit willen verwenden wir das Symbol $<$ für eine Striktordnung und das Symbol $\leq$ für die zugehörige Ordnung.*

Beweis: Sei zunächst $<$ eine Striktordnung. Wir zeigen, dass dann $\leq \; := \; < \cup Id$ eine Ordnung ist.

- reflexiv: Klar.
- antisymmetrisch: Gelte $x \leq y \wedge y \leq x$. Aus der Annahme $x \neq y$ folgt $x < y \wedge y < x$ im Widerspruch zur Asymmetrie von $<$.
- transitiv: Sei $x \leq y \wedge y \leq z$.
  1. Fall: $x = y \vee y = z$: Klar.
  2. Fall: $x \neq y \wedge y \neq z$. Nun folgt $x < y < z$, also $x < z$ und damit erst recht $x \leq z$.

Sei nun $\leq$ eine Ordnung. Wir zeigen, dass dann $< \; = \; \leq \setminus Id = \{(x, y) \mid x \leq y, x \neq y\}$ eine Striktordnung ist. Man beachte, dass $<$ irreflexiv ist.

- asymmetrisch: Aus der Annahme $x < y$ und $y < x$ folgt zunächst $x \leq y$ und $y \leq x$. Da $\leq$ antisymmetrisch ist, folgt $x = y$ und somit $x < x$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$.
- transitiv: Sei $x < y < z$. Dann folgt $x \leq y \leq z$ und somit $x \leq z$, da $\leq$ transitiv ist. Aus der Annahme $x = z$ folgt $z \leq y$, also $z = y$ (wegen $y \leq z$ und der Antisymmetrie von $\leq$), was im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$ steht.

■

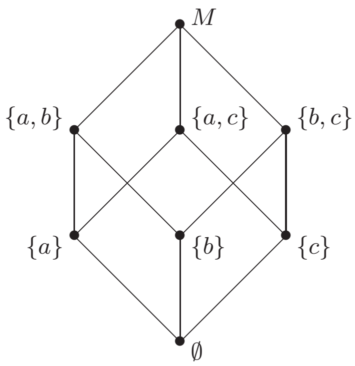
Zur graphischen Darstellung von Striktordnungen $<$ bzw. der zugehörigen Ordnungen $\leq$ werden gerne sog. ***Hasse–Diagramme*** verwendet.
Dabei wird nur der Graph der Nachbarrelation $\lhd \; := \; < \setminus <^2$, d.h.

$$x \lhd y \; :\Leftrightarrow \; x < y \wedge \neg \exists z : x < z < y$$

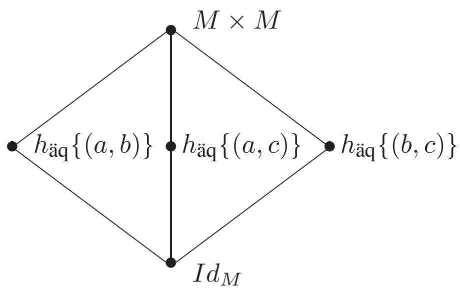
gezeichnet. Für $x \lhd y$ sagt man auch, y ist ***oberer Nachbar*** von x. Weiterhin wird im Fall $x \lhd y$ der Punkt y oberhalb vom Punkt x gezeichnet, so dass auf Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

Beispiel

a) Sei $M := \{a, b, c\}$.

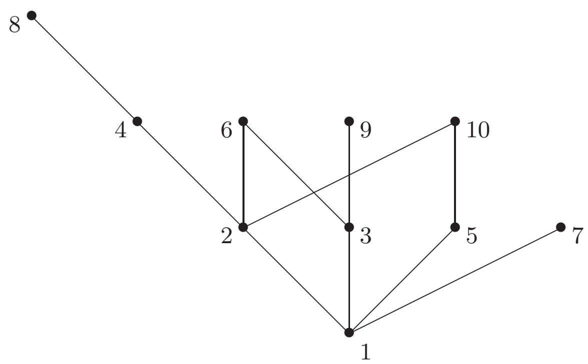


$(\mathcal{P}(M); \subseteq)$



$(\mathcal{A}(M); \subseteq)$

b) Die Einschränkung der "teilt"-Relation auf $\{1, 2, \ldots, 10\}$:



Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $H \subseteq A$. Ein Element $a \in H$ heißt ***kleinstes Element*** oder ***Minimum*** von H, falls $a \leq b$ für alle $b \in H$ gilt. Gilt entsprechend $a \geq b$ für alle $b \in H$, so heißt $a \in H$ ***größtes Element*** oder ***Maximum*** von H.

Aufgrund der Antisymmetrie kann es in jeder Teilmenge höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben. Besteht H beispielsweise aus zwei ***unvergleichbaren*** Elementen a und b, d.h. gilt weder $a \leq b$ noch $b \leq a$, so besitzt $H = \{a, b\}$ weder ein kleinstes noch ein größtes Element.

Ein Element $a \in H$ heißt **minimal** in H, falls es in H keine kleineren Elemente gibt, d.h. es gilt für alle $a, b \in H$,

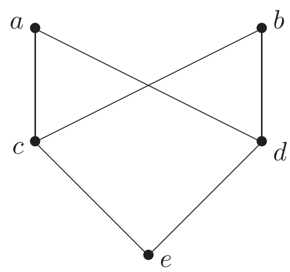
$$b \leq a \Rightarrow b = a.$$

Entsprechend heißt ein Element $a \in H$ ***maximal***, wenn

$$\forall b \in H : a \leq b \Rightarrow a = b$$

gilt, also keine echt größeren Elemente in H existieren.

In folgender Ordnung



besitzt beispielsweise die Teilmenge $\{a, b, c\}$ das kleinste Element c, aber kein größtes Element. Die Menge $\{a, b, c, e\}$ besitzt die beiden maximalen Elemente a und b, sowie ein minimales Element e.

Jedes Element $a \in A$ mit $a \leq b$ für alle $b \in H$ heißt ***untere*** und jedes $c \in A$ mit $b \leq c$ für alle $b \in H$ heißt ***obere Schranke*** von H. Eine Teilmenge H von A heißt ***nach oben beschränkt***, wenn (mindestens) eine obere Schranke für H existiert, und ***nach unten beschränkt***, wenn es eine untere Schranke für H gibt. Eine nach oben und unten beschränkte Teilmenge heißt ***beschränkt***.

In obigem Beispiel hat die Menge $H = \{a, b, c\}$ die beiden unteren Schranken c und e; obere Schranken existieren nicht.

Besitzt eine Teilmenge H eine größte untere Schranke, d.h. besitzt die Menge aller unteren Schranken von H ein größtes Element, so heißt dieses das ***Infimum von*** H ($\inf H$). Gilt entsprechend für ein Element $s \in A$

$$(\forall b \in H : b \leq s) \wedge (\forall s' \in A : (\forall b \in H : b \leq s') \Rightarrow s \leq s'),$$

d.h. ist s die kleinste obere Schranke von H, so heißt s das ***Supremum von*** H ($\sup H$). Aufgrund der Definition ist klar, dass es höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum für jede Teilmenge gibt.

Im vorigen Beispiel besitzt die Teilmenge $H = \{a, b, c\}$ das Infimum $\inf H = c$, aber kein Supremum, da keine oberen Schranken für H existieren. Das Infimum von $\{a, b\}$ existiert ebenfalls nicht, da die Menge $\{c, d, e\}$ der unteren Schranken von $\{a, b\}$ kein größtes Element besitzt. Das Infimum von $\{c, d\}$ ist e.

Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen. So hat in der linear geordneten Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$ die Teilmenge $H := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ weder ein Supremum noch ein Infimum. Natürlich hat in linearen Ordnungen jede endliche Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element und somit erst recht ein Supremum und ein Infimum.

Eine Teilmenge H von A heißt ***Kette***, falls je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h. es gilt für alle $a, b \in H$,

$$a \leq b \vee b \leq a.$$

Im Beispiel bilden $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, e\}$ und $\{b, d, e\}$ sowie alle Teilmengen hiervon Ketten.

Eine Teilmenge H von A heißt ***Antikette***, falls je zwei Elemente unvergleichbar sind, d.h. es gilt für alle $a, b \in H$,

$$a \not\leq b \wedge b \not\leq a.$$

Im Beispiel bilden $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ und $\{e\}$ sowie alle Teilmengen hiervon Antiketten.

1.4 Abbildungen

Eine binäre Relation R auf einer Menge M heißt ***rechtseindeutig***, falls

$$xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$$

und ***linkseindeutig***, falls

$$xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y$$

für alle $x, y, z \in M$ gilt.

Der ***Nachbereich*** $N(R)$ und der ***Vorbereich*** $V(R)$ von R ist

$$N(R) := \bigcup_{x \in M} R(x) \quad \text{und} \quad V(R) := \bigcup_{x \in M} R^T(x).$$

Eine rechtseindeutige Relation R mit $V(R) = A$ und $N(R) \subseteq B$ heißt ***Abbildung*** oder ***Funktion*** von A nach B (kurz $R : A \rightarrow B$). Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben $f, g, h, ...$ bezeichnen und für $(x, y) \in f$ nicht xfy sondern $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ schreiben.

Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, so wird der Vorbereich $V(f) = A$ der ***Definitionsbereich*** und die Menge B der ***Wertebereich*** oder ***Wertevorrat*** von f genannt. Der Nachbereich $N(f)$ wird als ***Bild*** von f bezeichnet. Im Fall $N(f) = B$ heißt f ***surjektiv***. Ist f linkseindeutig, so heißt f ***injektiv***. In diesem Fall impliziert $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$. Eine injektive und surjektive Abbildung heißt ***bijektiv***. Für eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist auch f^T eine Abbildung, die mit f^{-1} bezeichnet und die ***inverse Abbildung*** zu f genannt wird. Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

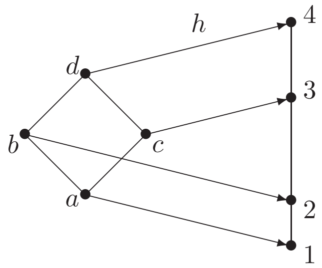
1.5 Homo- und Isomorphismen

Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen. Eine Abbildung $h : A_1 \to A_2$ heißt ***Homomorphismus***, falls für alle $a, b \in A_1$ gilt:

$$aR_1b \Rightarrow h(a)R_2h(b).$$

Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Ordnungen, so spricht man von ***Ordnungshomomorphismen*** oder einfach von ***monotonen*** Abbildungen. Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch ***streng monotone*** Abbildungen genannt.

Beispiel 1.7 *Folgende Abbildung $h : A_1 \to A_2$ ist ein bijektiver Homomorphismus. (Das Bild zeigt die Hasse-Diagramme der beiden Ordnungen $(A_1, \leq_1)$ und $(A_2, \leq_2)$).*



$(A_1, \leq_1)$ $(A_2, \leq_2)$

Bemerkung 2 *Die Umkehrung eines bijektiven Homomorphismus muss kein Homomorphismus sein (siehe Beispiel: wegen $2 \leq_2 3$ und $h^{-1}(2) = b \not\leq_1 c = h^{-1}(3)$ ist h^{-1} nicht monoton). Ist dies jedoch der Fall, so spricht man von einem Isomorphismus.*

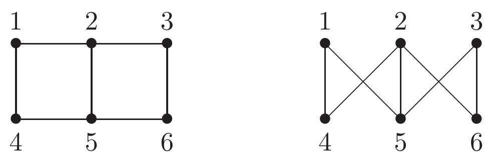
Definition 1.8 *Ein bijektiver Homomorphismus $h : A_1 \to A_2$, bei dem auch h^{-1} ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt*

$$\forall a, b \in A_1 : aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$

heißt **Isomorphismus***. In diesem Fall heißen die Strukturen (A_1, R_1) und (A_2, R_2)* **isomorph** *(kurz: $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$).*

Beispiel

a)



x	1	2	3	4	5	6
$h_1(x)$	1	5	3	4	2	6
$h_2(x)$	4	5	6	1	2	3

b) Die Bijektion $h : x \to e^x$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, \leq)$ und $((0, \infty), \leq)$.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

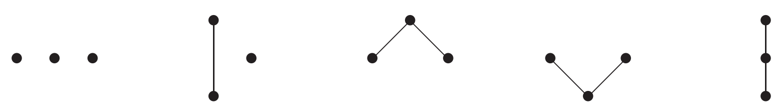
$$T_n \ := \ \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$$

die Menge aller Teiler von n und $P_n \ := \ T_n \cap$ Prim die Menge aller Primteiler von n. Dann ist für quadratfreies n, d.h. es gibt kein $k \in \mathbb{N}$, so dass k^2 die Zahl n teilt, die Abbildung $h : k \mapsto P_k$ ein Ordnungsisomorphismus zwischen $(T_n, |)$ und $(\mathcal{P}(P_n), \subseteq)$.

d) Während auf der Menge $V = \{1, 2, 3\}$ genau $2^3 = 8$ (allgemein $2^{\binom{n}{2}}$) verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 verschiedene nichtisomorphe Graphen:

Da auf der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ maximal $n!$ Graphen zueinander isomorph sein können, muss es mindestens $2^{\binom{n}{2}}/n!$ verschiedene nichtisomorphe Graphen auf V geben. Tatsächlich sind es $2^{\binom{n}{2}} \cdot \frac{1+o(1)}{n!}$, also auch nicht sehr viel mehr.

e) Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:



Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Äquivalenzrelation $\cong$ in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden.

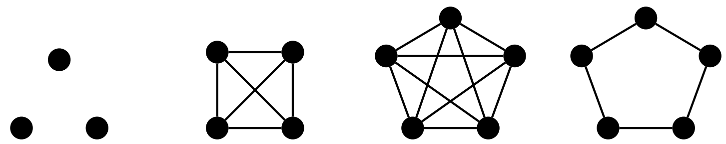
2 Graphen

Wir betrachten zunächst nur ungerichtete Graphen $G = (V, E)$, d.h. E ist eine symmetrische und irreflexive Relation auf V. Da in diesem Fall für jedes Paar $(x, y) \in R$ auch (y, x) in R enthalten ist und $x \neq y$ gilt, können wir die geordneten Paare (x, y) bzw. (y, x) durch ungeordnete Paare $\{x, y\}$ ersetzen. Dies führt uns auf folgende Definition.

Definition 2.1 *Sei V eine endliche Menge. Ein (endlicher, ungerichteter)* ***Graph*** *ist ein Paar $G = (V, E)$ mit $E \subseteq \binom{V}{2}$, wobei $\binom{V}{2} := \{e \subseteq V \mid \|e\| = 2\}$ aus allen zweielementigen Teilmengen von V besteht.*

Die Anzahl $\|V\|$ der Knoten wird die ***Ordnung*** von G genannt und mit $n(G)$ oder einfach mit n bezeichnet. Als Knotenmenge verwenden wir meist die Menge $V = \{1, \ldots, n\}$, für die wir auch kurz $[n]$ schreiben. Die Anzahl $\|E\|$ der Kanten wird die ***Größe*** von G genannt und mit $m(G)$ oder einfach mit m bezeichnet.

Beispiel 2.2 *Der kleinste Graph auf der Knotenmenge $V = [n]$ ist $E_n = ([n], \emptyset)$ und der größte ist $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$. Jeder zu E_n isomorphe Graph heißt* **leer** *und jeder zu K_n isomorphe Graph heißt* **vollständig**. *Ein Beispiel für einen Graphen mit $m = n$ Kanten ist $C_n = ([n], E)$ für $n \geq 3$, wobei $E = \{\{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$ ist.*



E_3 K_4 K_5 C_5

Eine Kante $e = \{u, v\} \in E$ ***verbindet*** die beiden ***Endpunkte*** u und v. Man sagt auch, e ***inzidiert*** mit den Knoten u und v, e und u bzw. e und v sind ***inzident***, oder die Knoten u und v sind ***adjazent*** (benachbart).

Der zu $G = (V, E)$ ***komplementäre*** Graph ist $\hat{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$. Beispielsweise sind der leere Graph E_n und der vollständige Graph K_n komplementär.

Wie bereits im vorigen Abschnitt bemerkt, gibt es auf einer n-elementigen Knotenmenge genau $2^{\binom{n}{2}}$ verschiedene Graphen, wovon $2^{\binom{n}{2}} \cdot \frac{1+o(1)}{n!}$ paarweise nichtisomorph sind.

Die ***Nachbarschaft*** eines Knotens $u \in V$ ist die Knotenmenge $\Gamma(u) = \{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}$. Die Anzahl $\|\Gamma(u)\|$ der Nachbarn ist der ***Grad*** von u und wird mit $d(u)$

bezeichnet. Da jede Kante mit zwei Knoten inzidiert, gilt

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2m(G).$$

Der ***Maximalgrad*** von G ist

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} d(u)$$

und der ***Minimalgrad*** von G ist

$$\delta(G) = \min_{u \in V} d(u).$$

Im Fall $\Delta(G) = \delta(G)$ heißt G ***regulär***.

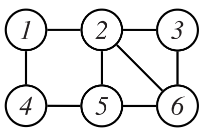
Ein ***Weg*** ist eine Folge $W = v_0, v_1, \ldots, v_l$ von Knoten mit $l \geq 0$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, l-1$. v_0 heißt der ***Anfangs-*** und v_l der ***Endknoten*** von W. Man sagt auch, W ist ein Weg von v_0 nach v_l. Die Anzahl l der dabei durchlaufenen Kanten wird als ***Länge*** $l(W)$ von W bezeichnet. Existiert zwischen je zwei Knoten $u, v \in V$ ein Weg, so heißt G ***zusammenhängend***.

Ein ***Pfad*** oder ***einfacher Weg*** ist ein Weg $P = v_0, v_1, \ldots, v_l$, bei dem alle Knoten v_i paarweise verschieden sind. Ein ***Kreis*** ist ein Weg $K = v_0, v_1, \ldots, v_l$ mit $l \geq 3$, $v_0 = v_l$ und $v_i \neq v_j$ für $1 \leq i < j \leq l$, d.h. $v_1, \ldots, v_l$ ist ein Pfad. Ein Graph, der keinen Kreis besitzt, heißt ***kreisfrei*** oder ***azyklisch***.

$G' = (V', E')$ ist ***Teilgraph*** von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$ gilt. Im Fall $V' = V$ wird G' auch ein ***(auf)spannender*** Teilgraph von G genannt. Gilt dagegen $V' \subseteq V$ und $E' = E \cap \binom{V'}{2}$, so wird G' der von V' in G ***induzierte*** Teilgraph genannt und mit $G[V']$ bezeichnet. Der Subgraph $G[V - U]$ von G, der aus G durch Entfernung aller Knoten $u \in U$ sowie aller mit diesen Knoten inzidenten Kanten entsteht, bezeichnen wir auch kurz mit $G - U$ bzw. mit $G - u$, falls $U = \{u\}$ nur einen Knoten enthält.

2.1 Cliquen und Stabilität

Definition 2.3 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann heißt $C \subseteq V$* **Clique** *in G, falls $G[C]$ vollständig ist. Ist dagegen $G[S]$ leer, so heißt $S \subseteq V$* **stabil** *oder* **unabhängig** *in G.*



$C = \{2, 5, 6\}$
$S = \{1, 3, 5\}$

Die Cliquenzahl von G ist

$$\omega(G) = \max\{\|C\| \mid C \textit{ ist Clique in } G\}$$

und die Stabilitätszahl von G ist

$$\alpha(G) = \max\{\|S\| \mid S \textit{ ist stabil in } G\}.$$

Beispiel 2.4

$$\omega(K_n) = n, \quad \omega(C_n) = \begin{cases} 3, & n = 3 \\ 2, & n \geq 4, \end{cases}$$
$$\alpha(K_n) = 1, \quad \alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Lemma 2.5

i) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$,

ii) $1 \leq \omega(G) \leq \Delta(G) + 1$,

iii) $\frac{n}{\Delta(G)+1} \leq \alpha(G) \leq n$.

Beweis:

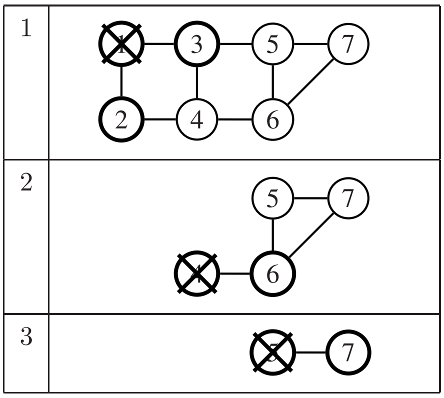
i) Da C genau dann eine Clique in G ist, wenn C stabil in $\bar{G}$ ist, folgt

$$\max\{\|C\| \mid C \text{ ist Clique in } G\} = \max\{\|S\| \mid S \text{ ist stabil in } \bar{G}\}.$$

ii) $\omega(G) \geq 1$ ist klar. $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$ folgt aus der Tatsache, dass der Grad jedes Knotens u in einer Clique C mindestens $\|C\| - 1$ beträgt.

iii) $\alpha(G) \leq n$ ist klar. Für $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$ betrachten wir folgenden Algorithmus.

Eingabe: $G = (V, E)$
  $S \leftarrow \emptyset$
  repeat wähle Knoten $u \in V$
    $S \leftarrow S \cup \{u\}$
    $G \leftarrow G - (\Gamma(u) \cup \{u\})$
  until $V = \emptyset$
Ausgabe: S



Da G zu Beginn n Knoten hat und da in jedem Schleifendurchlauf höchstens

$$\|\Gamma(u) \cup \{u\}\| = 1 + \|\Gamma(u)\| \leq 1 + \Delta(G)$$

Knoten entfernt werden, ist die Anzahl der Schleifendurchläufe (und damit die Größe der stabilen Menge S) mindestens $\frac{n}{\Delta(G)+1}$.

■

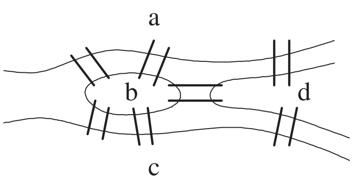
2.2 Euler- und Hamiltonkreise

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein Weg $W = v_0, v_1, \ldots, v_l$ heißt ***Eulerweg*** in G, falls jede Kante in E genau einmal durchlaufen wird, d.h. es gilt

$$\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 0 \leq i \leq l-1\} = E \text{ und } l(W) = m(G).$$

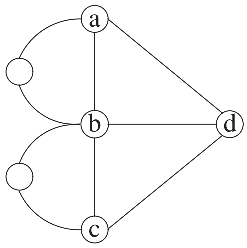
Gilt zudem $v_l = v_0$, so heißt W ***Eulerkreis***. Man beachte, dass ein Eulerkreis kein Kreis sein muss, da er einzelne Knoten mehrmals durchlaufen kann.

Königsberger Brückenproblem:



Frage: Gibt es einen Spaziergang über alle 7 Brücken, bei dem keine Brücke mehrmals überquert werden muss und der zum Ausgangspunkt zurückführt?

Gelöst von Euler (1707 – 1783) durch Betrachtung des folgenden Graphen, der offenbar genau dann einen Eulerkreis hat, wenn die Antwort auf obige Frage „ja“ ist.



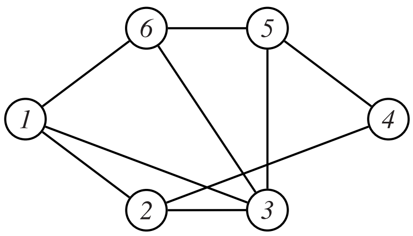
Satz 2.6 (Euler, 1736) *Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn all seine Knoten geraden Grad haben.*

(Beweis siehe Übungen.)

Ein Kreis $K = v_0, v_1, \dots, v_l$ heißt ***Hamiltonkreis*** in G, falls jeder Knoten in V genau einmal durchlaufen wird, d.h. es gilt

$$\{v_i \mid 0 \leq i \leq l\} = V \text{ und } l(W) = n(G).$$

Beispiel 2.7 *Der Graph*



besitzt den Hamiltonkreis $K = 1, 6, 3, 5, 4, 2, 1.$

Aufgrund des Satzes von Euler bereitet es keine Schwierigkeiten, für einen gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er einen Eulerkreis besitzt. Auch das Auffinden eines Eulerkreises ist nicht schwierig (siehe Übungen). Dagegen ist das Problem, die Existenz eines Hamiltonkreises zu entscheiden, $\mathcal{NP}$-vollständig.

2.3 Bäume

Definition 2.8 *Ein* ***Baum*** *ist ein zusammenhängender und azyklischer Graph (V, E). Jeder Knoten $u \in V$ vom Grad $d(u) \leq 1$ heißt* ***Blatt*** *(oder Endknoten) und die übrigen Knoten (vom Grad ≥ 2) heißen* ***innere Knoten****.*

Lemma 2.9 *Jeder Baum mit $n \geq 2$ Knoten hat mindestens 2 Blätter.*

Beweis: Ausgehend von einem beliebigen Knoten u_0 lässt sich ein Weg $P = u_0, u_1, \ldots, u_l$ konstruieren, indem man für $i = 0, 1, \ldots, l-1$ jeweils eine noch nicht benutzte Kante $\{u_i, u_{i+1}\}$ wählt. Da T ein Baum ist, gilt $u_i \neq u_j$ für $i \neq j$. Da T endlich ist, muss daher nach endlich vielen Schritten ein Knoten u_l erreicht werden, der keine Fortsetzung von P erlaubt, da er nur mit der Kante $\{u_{l-1}, u_l\}$ inzidiert. Also ist u_l ein Blatt und ein weiteres Blatt lässt sich dadurch finden, dass man dieses Verfahren mit dem Startknoten u_l wiederholt. ■

Ein Baum $T = (V, E)$ mit einem ausgezeichneten Knoten $r \in V$ (der ***Wurzel*** genannt wird) heißt ***Wurzelbaum*** und wird mit (T, r) bezeichnet.

2.4 Bipartite Graphen

Definition 2.10 *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt* **bipartit***, falls sich V so in zwei Teilmengen U und W partitionieren läßt, dass alle Kanten zwischen U und W verlaufen.*

Einen Spezialfall bildet der ***vollständig bipartite*** Graph $K_{u,w} = (V, E)$ mit $V = [u + w]$ und $E = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i \leq u < j \leq u + w\}$, der alle Kanten zwischen $U = \{1, \ldots, u\}$ und $W = \{u + 1, \ldots, u + v\}$ enthält.

Satz 2.11 *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge besitzt.*

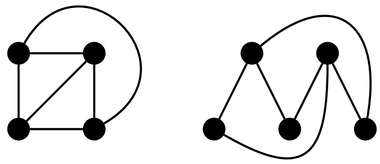
(Beweis siehe Übungen.)

2.5 Planare Graphen

Ein planarer Graph kann so in der Ebene gezeichnet werden, dass sich keine Kanten überschneiden.

Definition 2.12 *Ein Graph G heißt* **planar***, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt. Ein* **ebener** *Graph ist ein in die Ebene eingebetteter Graph.*

Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind K_4 und $K_{2,3}$ planar.

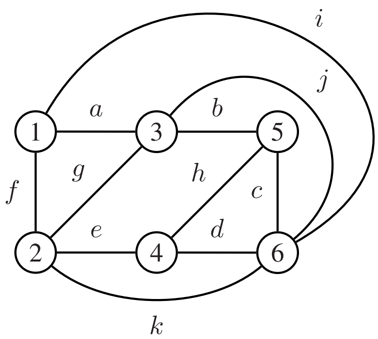


K_4 $\qquad$ $K_{2,3}$

Durch die Kanten eines ebenen Graphen wird die Ebene in so genannte ***Gebiete*** unterteilt, von denen genau eines unbeschränkt ist und als ***äußeres*** Gebiet bezeichnet wird. Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r. Der ***Rand*** eines Gebiets ist die Menge aller Kanten, die an dieses Gebiet grenzen. Bezeichnen wir die Anzahl der an ein Gebiet g grenzenden Kanten mit $d(g)$, so gilt offensichtlich

$$\sum_{g \text{ Gebiet}} d(g) = 2m(G).$$

Ein ebener Graph wird durch das Tripel $G = (V, E, R)$ beschrieben, wobei R aus den Rändern aller Gebiete von G besteht.



$$R = \{\{a, f, g\}, \{a, i, j\}, \{b, h, e, g\}, \{b, c, j\}, \{c, d, h\}, \{e, d, k\}, \{f, i, k\}\}$$

Satz 2.13 (Euler, 1750) *Sei $G = (V, E, R)$ ein zusammenhängender ebener Graph. Dann gilt*

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \qquad (*)$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$: Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein. Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt.

$m = 1$: In diesem Fall muss $n = 2$ und $r = 1$ sein, weshalb $(*)$ erfüllt ist.

$m - 1 \rightsquigarrow m$: Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten.

1. Fall: G ist ein Baum. Nach Entfernen eines Blattes u ist der resultierende Graph $G - u$ immer noch zusammenhängend und eben, besteht jedoch aus $n - 1$ Knoten, $m - 1$ Kanten und r Gebieten. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $(n - 1) - (m - 1) + r = 2$, so dass $(*)$ erfüllt ist.

2. Fall: G ist kein Baum. Sei $K = u_0, u_1, \ldots, u_l$ ein Kreis in G. Nach Entfernen der Kante $\{u_0, u_1\}$ entsteht ein zusammenhängender ebener Graph mit $m-1$ Kanten, n Knoten und $r-1$ Gebieten. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $n-(m-1)+(r-1)=2$, so dass $(*)$ auch in diesem Fall erfüllt ist.

■

Korollar 2.14 *Sei $G=(V,E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann gilt $m \leq 3n-6$.*

Beweis: Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass G zusammenhängend ist. Sei i die Anzahl der Inzidenzen von Kanten und Gebieten. Da jede Kante mit 2 Inzidenzen zu Buche schlägt, gilt $i = 2m$. Da $n \geq 3$ ist, steuert andererseits jedes Gebiet mindestens 3 Inzidenzen bei. Daher gilt $2m = i \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$ und es ergibt sich mit Eulers Formel

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was $m \leq 3n-6$ impliziert. ■

Korollar 2.15 *K_5 ist nicht planar.*

Beweis: Wegen $n=5$, also $3n-6=9$ und wegen $m=\binom{5}{2}=10$ gilt $m \not\leq 3n-6$. ■

Korollar 2.16 *Sei $G=(V,E)$ ein dreiecksfreier, planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann gilt $m \leq 2n-4$.*

Beweis: Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G, wobei wir wieder o.B.d.A. annehmen können, dass G zusammenhängend ist. Wie im vorigen Beweis gilt $i = 2m$, wobei i die Anzahl der Inzidenzen von Kanten und Gebieten ist. Da $n \geq 3$ und G zusammenhängend und dreiecksfrei ist, steuert andererseits jedes Gebiet mindestens 4 Inzidenzen bei. Daher gilt $2m = i \leq 4r$ bzw. $r \leq m/2$ und es ergibt sich mit Eulers Formel

$$m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2,$$

was $m \leq 2n-4$ impliziert. ■

Korollar 2.17 *$K_{3,3}$ ist nicht planar.*

Beweis: Wegen $n=6$, also $2n-4=8$ und wegen $m=3\cdot 3=9$ gilt $m \not\leq 2n-4$. ■

2.6 Färbung von Graphen und das 4-Farben-Problem

Definition 2.18 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbf{N}$. Eine k-**Färbung** von G ist eine Abbildung $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ mit $c(u) \neq c(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$. Falls eine solche Abbildung existiert, heißt G k-**färbbar**.*

*Die **chromatische Zahl** von G ist*

$$\chi(G) = \min\{k \geq 1 \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Beispiel 2.19

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 2.20

$i)$ $\chi(G) \geq \omega(G)$,

$ii)$ $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$,

$iii)$ $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis:

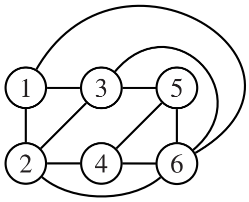
$i)$ ist klar.

$ii)$ Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G. Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $\|S_i\| \leq \alpha(G)$ und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

$iii)$ Betrachte folgenden Färbungsalgorithmus:

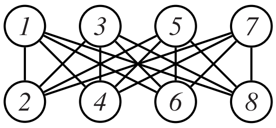
Eingabe: $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
  $c(v_1) \leftarrow 1$
  for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
    $F \leftarrow \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in \Gamma(v_i)\}$
    $c(v_i) \leftarrow \min\{k \geq 1 \mid k \notin F\}$
  end
Ausgabe: c



i	1	2	3	4	5	6
$c(v_i)$	1	2	3	1	2	4

Da zur Färbung von v_i höchstens $\|F\| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, benutzt der Algorithmus nur Farben $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$. ■

Beispiel 2.21 *Obiger Algorithmus benötigt zur Färbung von $K_{n,n}$ nur 2 Farben.*



i	1	2	3	4	5	6	7	8
$c(v_i)$	1	2	1	2	1	2	1	2

4-Farben-Vermutung: Jede Landkarte kann mit 4 Farben gefärbt werden, so dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich jede Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. (Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, werden nicht als benachbart betrachtet.)

Diese Vermutung wurde 1878 von Kempe „bewiesen". Erst 1890 entdeckte Heawood den Fehler, welcher im „Beweis" von Kempe enthalten war. Dabei entstand dann der 5-Farben-Satz. Dass die 4-Farben-Vermutung tatsächlich stimmt, wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der auftretenden Spezialfälle der Einsatz von Computern benötigt wird.

Lemma 2.22 *Sei G ein planarer Graph. Dann ist $\delta(G) \leq 5$.*

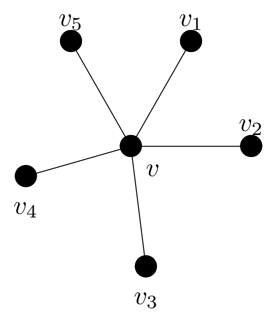
Beweis: Für $\|V\| \leq 6$ ist die Behauptung klar. Für $\|V\| > 6$ würde aus der Annahme $\delta(G) \geq 6$ sofort $\|E\| = \frac{1}{2}\sum_{u \in V} d(u) \geq \frac{1}{2}\sum_{u \in V} 6 = 3\|V\|$ folgen, was aber der Ungleichung $\|E\| \leq 3 \cdot \|V\| - 6$, die für planare Graphen mit mindestens drei Knoten gilt, widerspräche. ■

Satz 2.23 (Kempe, Heawood) *Jeder planare Graph $G = (V, E)$ ist 5-färbbar.*

Beweis: Durch Induktion über $n = \|V\|$.

$n \leq 5$: Klar.

$n > 5$: Nach vorigem Lemma existiert ein Knoten v mit $d(v) \leq 5$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine 5-Färbung c von $G - v$. Ist $\Gamma(v)$ durch c mit höchstens vier Farben gefärbt, so können wir c auf v fortsetzen. Andernfalls betrachten wir eine feste kreuzungsfreie Einbettung von G in die Ebene. Darin seien die Nachbarn $v_1, v_2, \ldots, v_5$ von v in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn um v angeordnet und es gelte o. B. d. A. $c(v_i) = i$.



1. Beweismöglichkeit:

Für Farben i und j bezeichne $G_{i,j}$ den Teilgraphen $G[\{u \in V \mid c(u) \in \{i,j\}\}]$ von G, der durch alle mit i oder j gefärbten Knoten induziert wird.

1. Fall: In $G_{1,3}$ existiert kein Weg von v_1 nach v_3.
   Dann lässt sich c zu einer Färbung c' mit $c'(v_1) = 3$ modifizieren, indem in der Zusammenhangskomponente von $G_{1,3}$, in welcher sich v_1 befindet, die Farben 1 und 3 vertauscht werden.
2. Fall: In $G_{1,3}$ existiert ein Weg von v_1 nach v_3.
   Dann kann es in $G_{2,4}$ keinen Weg von v_2 nach v_4 geben, d. h. c lässt sich zu einer Färbung c' mit $c'(v_2) = 4$ modifizieren.

In beiden Fällen benutzt c' für $\Gamma(v)$ nur vier Farben, so dass für u eine Farbe übrig bleibt.

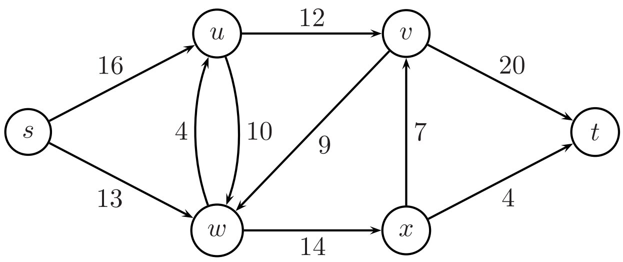
2. Beweismöglichkeit:

Da G planar ist, ist in G kein K_5 enthalten, d. h. es existieren $i \neq j \in \{1, \ldots, 5\}$ mit $\{v_i, v_j\} \notin E$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für den Graph G', der aus $G - v$ durch Identifikation von v_i mit v_j entsteht, eine 5-Färbung c. Trennen wir nun v_i wieder von v_j, so ist c immer noch eine 5-Färbung mit $c(v_i) = c(v_j)$, d. h. v kann mit der verbliebenen Farbe gefärbt werden. ■

2.7 Flüsse in Netzwerken

Definition 2.24 *Ein* **Netzwerk** $N = (V, E, s, t, c)$ *besteht aus einem gerichteten Graphen* $G = (V, E)$ *mit zwei ausgezeichneten Knoten* $s, t \in V$*, der* **Quelle** s *und der* **Senke** t*, sowie einer* **Kapazitätsfunktion** $c : V \times V \to \mathbb{N}$ *mit* $c(u, v) = 0$ *für alle* $(u, v) \notin E$.

Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk N.

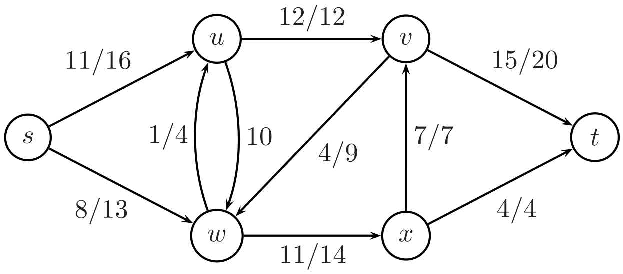


Definition 2.25 *Ein* ***Fluss*** *für N ist eine Funktion $f : V \times V \to \mathbb{Z}$ mit*

- $f(u, v) \leq c(u, v)$, *„Kapazitätsbedingung“*
- $f(u, v) = -f(v, u)$, *„Symmetriebedingung“*
- *Für alle $u \in V - \{s, t\} : \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$.* *„Kirchhoffsches Gesetz“*

Der ***Betrag*** *von f ist $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$.*

Die folgende Abbildung zeigt einen Fluss f für das Netzwerk N.



Problem: Wie lässt sich ein Fluss mit maximalem Betrag bestimmen?

Definition 2.26 *Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk und sei f ein Fluss für N. Das zugeordnete* ***Restnetzwerk*** *ist $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$, wobei*

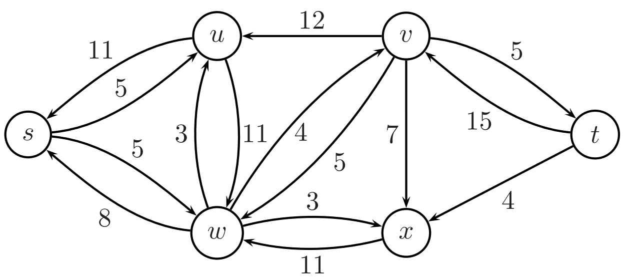
$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

und

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}$$

ist.

Die folgende Abbildung zeigt das Restnetzwerk N_f, das zum Netzwerk N und zum Fluss f gehört.



Definition 2.27 *Sei $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$ ein Restnetzwerk. Dann ist $P = u_0, \ldots, u_k$ ein* ***Erweiterungspfad*** *für N_f, falls P ein Pfad von s nach t im Graphen (V, E_f) ist, d.h. es gilt*

- $u_0 = s$,
- $u_k = t$,
- $c_f(u_i, u_{i+1}) > 0$ *für* $i = 0, \ldots, k-1$.

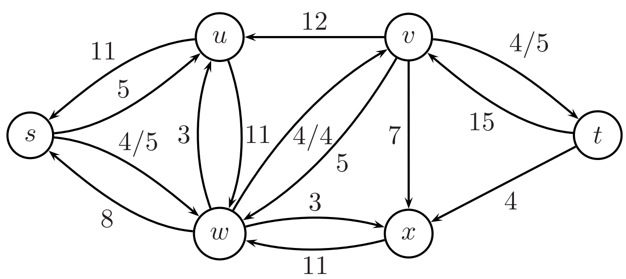
Die ***Restkapazität*** *von P in N_f ist*

$$c_f(P) = \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \text{ liegt auf } P\}$$

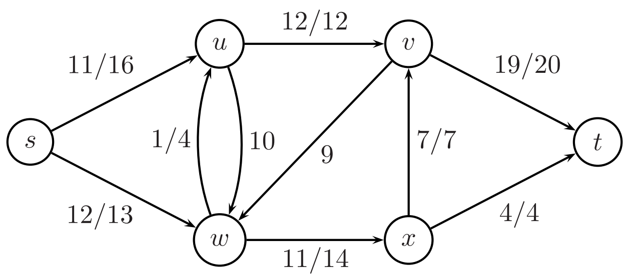
und der zu P gehörige Fluss in N_f ist

$$g_P(u,v) = \begin{cases} c_f(P), & (u,v) \text{ liegt auf } P, \\ -c_f(P), & (v,u) \text{ liegt auf } P, \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Die folgende Abbildung zeigt den zum Erweiterungspfad $P = s, w, v, t$ gehörigen Fluss g_P in N_f. Die Restkapazität von P ist $c_f(P) = 4$.



Es ist leicht zu sehen, dass g_P tatsächlich ein Fluss für N_f ist. Durch Addition der beiden Flüsse f und g_P erhalten wir einen größeren Fluss f'.



Lemma 2.28 *Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk, f ein Fluss für N, sei P ein Erweiterungspfad für das Restnetzwerk N_f und sei g_P der zu P gehörige Fluss in N_f. Dann ist $f' = f + g_P$ ein Fluss für N mit $|f'| = |f| + |g_P|$.*

Nun können wir den **Ford-Fulkerson-Algorithmus** angeben:

Eingabe: Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$
  setze $f(u, v) = 0$ für alle $(u, v) \in V \times V$
  while es gibt einen Erweiterungspfad P für N_f **do**
    $f \leftarrow f + g_P$
  end
Ausgabe: f

Frage: Berechnet der Algorithmus von Ford-Fulkerson tatsächlich einen optimalen Fluss?

Um diese Frage mit ja beantworten zu können, müssen wir zeigen, dass f ein optimaler Fluss ist, falls es im Restnetzwerk N_f keinen Erweiterunspfad mehr gibt.

Definition 2.29 *Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk. Ein* ***Schnitt*** *durch N ist eine Partition (A, B) von V mit $s \in A$ und $t \in B$. Die* ***Kapazität*** *eines Schnittes (A, B) ist*

$$c(A, B) = \sum_{u \in A, v \in B} c(u, v)$$

Ist f ein Fluss für N, so heißt

$$f(A, B) = \sum_{u \in A, v \in B} f(u, v)$$

der ***Fluss über den Schnitt*** (A, B).

Lemma 2.30 *Für jeden Schnitt (A, B) und jeden Fluss f gilt:*

1. $f(A, B) \leq c(A, B)$

2. $f(A, B) = |f|$

Beweis: zu 1:

$$f(A, B) = \sum_{u \in A, v \in B} \underbrace{f(u, v)}_{\leq c(u,v)} \leq \sum_{u \in A, v \in B} c(u, v) = c(A, B)$$

zu 2: Wir führen einen Induktionsbeweis über $\|A\| = k$ durch.

Induktionsanfang: Für $\|A\| = 1$ ist die Behauptung klar.

Induktionsschritt: Sei (A, B) ein Schnitt mit $\|A\| = k+1$. Wähle ein $v \in A - \{s\}$ und betrachte den Schnitt $(A', B') := (A - \{v\}, B \cup \{v\})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $f(A', B') = |f|$. Somit gilt also:

$$f(A, B) = f(A', B') - \sum_{u \in A} f(u, v) + \sum_{u \in B} f(v, u) = |f| + \sum_{u \in V} f(v, u) = |f|$$

■

Satz 2.31 (Min-Cut-Max-Flow-Theorem) *Sei f ein Fluss für $N = (V, E, s, t, c)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist maximal.*
2. *In N_f existiert kein Erweiterungspfad.*
3. *Es gibt einen Schnitt (A, B) mit $c(A, B) = |f|$.*

Beweis:

„1 ⇒ 2“: Würde ein Erweiterungspfad existieren, so könnte f verbessert werden, was ein Widerspruch wäre.

„2 ⇒ 3“: Betrachte den Schnitt (A, B) mit

$$\begin{aligned} A &= \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\} \\ B &= V \setminus A. \end{aligned}$$

Dann gilt:

- $s \in A$
- $t \in B$, da kein Erweiterungspfad existiert
- $c_f(u, v) = 0$ für alle $u \in A$ und $v \in B$. Wegen $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ folgt somit

$$|f| = f(A, B) = \sum_{u \in A, v \in B} f(u, v) = \sum_{u \in A, v \in B} c(u, v) = c(A, B).$$

„3 ⇒ 1“: Klar, da für jeden Fluss f' gilt:

$$|f'| \leq c(A, B) = |f|.$$

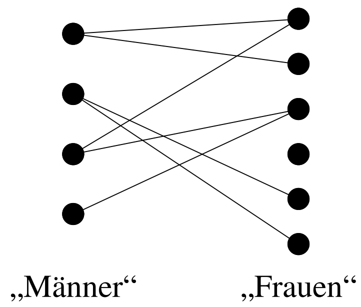
■

2.8 Heiratssatz

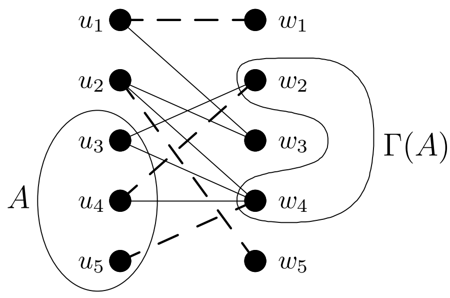
Gegeben sei ein ***bipartiter*** Graph $G = (V, E)$ mit $V = U \dot\cup W$ (Bem.: Mit $\dot\cup$ bezeichnen wir die disjunkte Vereinigung.), wobei für alle Kanten $e \in E$ gelte: $\|e \cap U\| = 1$. Gesucht ist ein möglichst großes Matching $M \subseteq E$, so dass keine zwei Kanten in M inzidieren.

Definition 2.32 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $M \subseteq E$ heißt* ***Matching****, falls für alle $e, e' \in M$ gilt:*

$$e \neq e' \Rightarrow e \cap e' = \emptyset$$



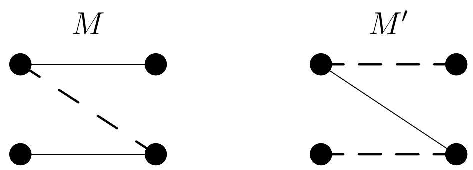
Beispiel 2.33 *Eine Kante $\{u, w\} \in E$ bedeutet in diesem Fall, dass eine Heirat von u und w nicht ausgeschlossen ist.*



$$\|\Gamma(A)\| < \|A\|$$

Beispiel 2.34 *M (gestrichelt gezeichnet) ist ein Matching mit $\|M\| = 4$. Wegen $\|\Gamma(\{u_3, u_4, u_5\})\| = \{w_2, w_4\} = 2$ kann es offensichtlich kein Matching der Größe 5 geben.*

Bemerkung 3 *Ein bezüglich Mengeninklusion maximales Matching muss nicht optimal sein:*



$M = \{\{u_1, w_2\}\}$ ist maximal, da es sich nicht erweitern lässt. M ist jedoch kein (bzgl. Kardinalität) maximales Matching, da $M' = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}\}$ größer ist. Die Greedy-Methode funktioniert also nicht.

Satz 2.35 (Heiratssatz von Hall) *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit der Knotenpartition $V = U \dot{\cup} W$. Dann existiert in G genau dann ein Matching M mit $\|M\| = \|U\|$, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq U$ gilt: $\|\Gamma(A)\| \geq \|A\|$, wobei $\Gamma(A) = \bigcup_{u \in A} \Gamma(u)$ sei.*

Beweis:

„⇒“: Klar, da in $\Gamma(A)$ für jedes $u \in A$ der Partner von u (bzgl. M) enthalten ist.

„⇐“: Gelte $\|\Gamma(A)\| \geq \|A\|$ für alle $A \subseteq U$ und sei $M \subseteq E$ ein Matching mit $\|M\| < \|U\|$. Wir zeigen, dass dann ein Matching M' mit $\|M'\| > \|M\|$ existiert.

Bezeichne

$$U(M) = \{u \in U \mid \exists e \in M : u \in e\}$$

und

$$W(M) = \{w \in W \mid \exists e \in M : w \in e\}$$

Wir verwenden folgendes Lemma, dessen Beweis wir später nachholen.

Lemma 2.36 *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit der Knotenpartition $V = U \dot{\cup} W$ und gelte $\|\Gamma(A)\| \geq \|A\|$ für alle $A \subseteq U$. Dann existiert zu jedem Matching M mit $\|M\| < \|U\|$ ein Pfad $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ mit*

- $a_1 \in U \setminus U(M)$
- $b_k \in W \setminus W(M)$
- $\{a_i, b_i\} \in E \setminus M$ *für* $i = 1, \ldots, k$
- $\{b_i, a_{i+1}\} \in M$ *für* $i = 1, \ldots, k - 1$.

Nun können wir ein Matching M' mit $\|M'\| = \|M\| + 1$ wie folgt definieren:

$$M' = \{\{a_i, b_i\} \mid i = 1, \ldots, k\} \cup M \setminus \{\{b_i, a_{i+1}\} \mid i = 1, \ldots, k - 1\}.$$

Für den Beweis des Lemmas betrachten wir das Netzwerk $N = (V', E', s, t, c)$ mit

- $V' = V \cup \{s, t\}$,
- $E' = \{(s, u) \mid u \in U\} \cup \{(u, w) \mid u \in U, w \in W, \{u, w\} \in M\} \cup \{(w, t) \mid w \in W\}$ und
- $c(e) = 1$ für alle $e \in E'$.

Dann können wir dem Matching M einen Fluss f_M in N mit $|f_M| = \|M\|$ wie folgt zuordnen:

$$f_M(v, v') = \begin{cases} 1, & (v, v') \in E_M \\ -1, & (v', v) \in E_M \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $E_M = \{(s, u) \mid u \in U(M)\} \cup \{(u, w) \mid \{u, w\} \in M\} \cup \{(w, t) \mid w \in W(M)\}$ ist. Außerdem erfüllt ein Pfad $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ genau dann die im Lemma geforderten Bedingungen, wenn $s, a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, t$ ein Erweiterungspfad in N_{f_M} ist. Es genügt also, die Annahme, dass in N_{f_M} kein Erweiterungspfad existiert, auf einen Widerspruch zu führen. Nach dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem müsste in diesem Fall für den Schnitt (A, B) mit

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{u \in V' \mid u \text{ ist von } s \text{ aus in } N_{f_M} \text{ erreichbar}\} \\ B & = & V' - A \end{array}$$

$c(A, B) = |f|$ gelten. Da der Schnitt (A, B) alle Kanten (s, u) mit $u \in U - A$ und wegen $\Gamma(A \cap U) \subseteq A$ auch alle Kanten (w, t) mit $w \in \Gamma(A \cap U)$ enthält, gilt jedoch

$$c(A, B) \geq \|U - A\| + \underbrace{\|\Gamma(A \cap U)\|}_{\geq \|A \cap U\|} \geq \|U - A\| + \|A \cap U\| = \|U\| > |f|.$$

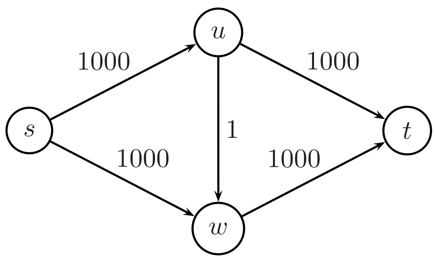
Dies ist also ein Widerspruch.

■

Bemerkung 4 • *Sei $\beta(G)$ die maximale Größe eines Matchings in einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = U \,\dot\cup\, W$. Dann gilt*

$$\beta(G) = \|U\| - \max_{A \subseteq U} (\|A\| - \|\Gamma(A)\|)\,.$$

- *Wird der Ford-Fulkerson-Algorithmus zur Berechnung eines maximalen Matchings benutzt, so ist seine Komplexität $O(n \cdot m)$. Im Allgemeinen kann der Algorithmus von Ford-Fulkerson jedoch exponentielle Komplexität besitzen:*



Bei diesem Netzwerk benötigt Ford-Fulkerson mindestens 2 und höchstens 2000 Schleifendurchläufe zur Bestimmung eines maximalen Flusses. Dies lässt sich (nicht nur in diesem Beispiel) dadurch vermeiden, dass man immer einen kürzesten Erweiterungspfad bestimmt (solange einer existiert). Diese Vorgehensweise wird als ***Edmonds-Karp-Strategie*** *bezeichnet.*

2.9 Kürzeste Wege

Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einem ***Startknoten*** $s \in V$ und einem ***Zielknoten*** $t \in V$, sowie eine Längenfunktion $l : E \to \mathbb{N}$. Die Aufgabe besteht darin, einen möglichst kurzen Weg von s nach t zu finden.

Der **Dijkstra-Algorithmus** löst nicht nur diese Aufgabe, mit ihm können auch kürzeste Wege zu allen Knoten $u \in V$ bestimmt werden (falls man die while-Bedingung $t \in T$ durch $T \neq \emptyset$ ersetzt.

1 **Eingabe:** gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit s, t, l wie oben
2   $d(s) \leftarrow 0$
3   **for all** $u \in V - \{s\}$ **do**
4     $d(u) \leftarrow \infty$
5   **end**
6   $T \leftarrow V$
7   **while** $t \in T$ **do**
8   **Finde** $u \in T$ **mit** $d(u)$ **minimal**
9     $T \leftarrow T - \{u\}$
10   **for all** $v \in \Gamma(u) \cap T$ **do**
11   **if** $d(u) + l(u, v) < d(v)$ **then**
12         $d(v) \leftarrow d(u) + l(u, v)$
13         $\alpha(v) \leftarrow u$
14   **end**
15   **end**
16   **end**
17 **Ausgabe:** Weg $u_0, \ldots, u_k$ mit $u_k = t$, $\alpha(u_i) = u_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, k$
und $u_0 = s$ (natürlich nur, falls $d(t) < \infty$ ist)

Für einen Knoten $u \in V$ sei $\delta(u)$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach u. Falls in G kein Weg von s nach t existiert, sei $\delta(u) = \infty$. Das folgende Lemma beweist die Korrektheit des Dijkstra-Algorithmus'.

Lemma 2.37 *Für jeden Knoten u, der in Schritt 5 ausgewählt wird, gilt $d(u) = \delta(u)$ und im Fall $d(u) < \infty$ bestimmt α jeweils den Vorgänger $\alpha(u_i) = u_{i-1}$ auf einem kürzesten Weg $u_0, \ldots, u_k$ von $s = u_0$ nach $u = u_k$.*

Beweis: Wir beweisen die Aussage des Lemmas durch Induktion über die Reihenfolge, in der die Knoten aus T entfernt werden.

Induktionsanfang: Zuerst wird der Startknoten s aus T entfernt. Wegen $d(u) = 0 = \delta(u)$ trifft die Aussage auf s zu.

Induktionsschritt: Sei u ein Knoten, der aus T entfernt wird und gelte die Aussage für alle Knoten u', die vor u aus T entfernt wurden.

1. Fall: $d(u) = \infty$. Sei u' der erste Knoten, der mit dem Wert $d(u') = \infty$ aus T gewählt wird. Dann gilt zum Zeitpunkt der Wahl von u' $d(v) = \infty$ für alle $v \in T$ und $d(v) < \infty$ für alle $v \in V - T$. Da zu diesem Zeitpunkt alle Knoten in $\Gamma(V - T)$ bereits einen endlichen Wert $d(v)$ erhalten haben, kann keine Kante von einem Knoten in $V - T$ zu einem Knoten in T existieren. Daher kann $u \in T$ nicht von $s \in V - T$ aus erreichbar sein.
2. Fall: $d(u) < \infty$. Wir zeigen zuerst $d(u) \geq \delta(u)$. Sei u' der Knoten, bei dessen Wahl aus T $d(u)$ auf $d(u') + l(u', u)$ gesetzt wurde. Da nach Induktionsvoraussetzung ein Weg von s nach u' der Länge $d(u')$ existiert, ist klar, dass es auch einen Weg von s nach u der Länge $d(u)$ gibt.
   Es ist also nur noch $d(u) \leq \delta(u)$ zu zeigen. Sei $v_0, \ldots, v_k$ ein kürzester Weg von $s = v_0$ nach $u = v_k$. Weiterhin sei v_i der letzte Knoten auf diesem Weg, der vor u aus T entfernt wird. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

   $$d(v_i) = \delta(v_i) = \sum_{j=0}^{i-1} l(v_j, v_{j+1}).$$

   Da $v_{i+1} \in \Gamma(v_i) \cap T$ ist, wenn v_i aus T gewählt wird, gilt dann

   $$d(u) = d(v_{i+1}) \leq d(v_i) + l(v_i, v_{i+1}) = \delta(v_i) + l(v_i, v_{i+1}) = \delta(v_{i+1}).$$

   Im Fall $u = v_{i+1}$ ist nichts weiter zu zeigen. Aber auch wenn $u \neq v_{i+1}$ ist, muss $\delta(v_{i+1}) \leq \delta(u)$ sein, da sonst anstelle von v_{i+1} der Knoten u aus T gewählt worden wäre.

■