Übungen zur Komplexitätstheorie — Sommersemester 2003

Olaf Beyersdorff / Lorenz Weizsäcker

Übungsblatt 3

Aufgabe 8

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine 1-TM, welche die Sprache der Palindrome (siehe Aufgabe 4) entscheidet. Wir möchten zeigen, dass M einen Zeitverbrauch von $\Omega(n^2)$ hat.
Sei $w \in \Sigma^*$. Wir sagen, *$M(w)$ überquert im Schritt t die Feldgrenze i, $i \geq 1$, mit $(q, q') \in Q^2$*, falls es zwei Konfigurationen (q, u, v) und (q', u', v'), mit $(q_0, \varepsilon, \triangleright w) \xrightarrow{M}_{t-1} (q, u, v) \xrightarrow{M} (q', u', v')$ gibt, so dass entweder

(A) $|u| = i - 1$ und $|u'| = i$ oder

(B) $|u| = i$ und $|u'| = i - 1$ gilt.

Sei $S_i(M, w) = ((q_1, q_1'), \ldots, (q_m, q_m'))$ die Folge aller Paare aus Q^2, mit denen $M(w)$ *nacheinander* die Feldgrenze i überquert, und sei $t(w)$ der Zeitverbrauch von $M(w)$. Betrachten Sie nun für ein beliebiges $x \in \Sigma^s$, $s \in \mathbb{N}$, die Eingabe $w = x0^s x^R$ und zeigen Sie:

a) Es gibt eine Zahl $i \in \{s+1, \ldots, 2s+1\}$, so dass $S_i(M, x)$ die Länge $m \leq \frac{t(w)}{s}$ hat.

b) Das Wort x ist eindeutig durch Angabe von M, i, s und $S_i(M, w)$ beschreibbar.

c) $K(x) \in O(\frac{t(w)}{|x|} + \log |x|)$.

d) M benötigt Zeit $\Omega(n^2)$.

Aufgabe 9 (schriftlich, 10 Punkte)

Der **Kleene-Stern** einer Sprache L ist definiert durch

$$L^* = \{x_1 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ und } x_1, \ldots, x_k \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen P und NP abgeschlossen sind unter

a) Vereinigung,

b) Schnitt und

c) dem Kleene-Stern.