Übungen zur Komplexitätstheorie — Sommersemester 2003

Olaf Beyersdorff / Lorenz Weizsäcker

Übungsblatt 4

Aufgabe 10 (schriftlich, 10 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Variante des Platzhierarchiesatzes:
Ist f eine echte Komplexitätsfunktion und gilt $g(n) \in o(f(n))$, dann gibt es eine Sprache die in $\mathbf{DSPACE}(f(n))$ aber nicht in $\mathbf{DSPACE}(g(n))$ liegt.

Aufgabe 11 (Union Theorem)

Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Funktion S mit $\mathbf{DSPACE}(S(n)) = \mathbf{PSPACE}$.
Hinweis: Definieren Sie $S(n)$ bezüglich einer Aufzählung aller TMs $M_1, M_2, \ldots$, so dass die beiden folgenden Bedingungen gelten:

a) Für alle k gilt $S(n) \geq n^k$ für fast alle n.

b) Falls der Platzbedarf $S_i(n)$ von M_i für alle k die Bedingung $S_i(n) > n^k$ für unendlich viele n erfüllt, dann gilt auch $S_i(n) > S(n)$ für unendlich viele n.

Aufgabe 12 (Blum Komplexität)

Sei Φ eine Funktion, die (geeignete Kodierungen von) TMs M und Eingaben x in die natürlichen Zahlen abbildet. Dann heißt Φ ein **Komplexitätsmaß**, falls die beiden folgenden Axiome erfüllt sind:
Axiom 1: $\Phi(M, x)$ ist genau dann definiert, wenn $M(x)$ definiert ist.
Axiom 2: Es ist rekursiv entscheidbar, ob $\Phi(M, x) = m$ gilt.
Sind die folgenden Maße Komplexitätsmaße?

a) $\mathit{time}_M(x)$ und $\mathsf{space}_M(x)$ für TMs und NTMs.

b) $\mathit{ink}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch ein anderes Symbol.

c) $\mathit{carbon}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch das *gleiche* Symbol.

Aufgabe 13

Zeigen Sie, dass die $\leq_{\log}$-Reduzierbarkeit reflexiv und transitiv ist.

Aufgabe 14

Zwei Sprachen A und B heißen **äquivalent** ($A \equiv_{\log} B$), falls $A \leq_{\log} B$ und $B \leq_{\log} A$ gilt. Der **Grad** einer Sprache A ist die Klasse aller Sprachen B, die äquivalent zu A sind. Aus wie vielen verschiedenen Graden besteht die Klasse $\mathbf{L}$ (logarithmischer Platz)?