Übungen zur Komplexitätstheorie Sommersemester 2003

Olaf Beyersdorff / Lorenz Weizsäcker

Übungsblatt 8

Aufgabe 28

Zeigen Sie, dass aus $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{BPP}$ die Gleichheit $\mathbf{NP} = \mathbf{RP}$ folgt.

Aufgabe 31

Falls $\mathbf{PSPACE} = \mathbf{PH}$, dann kollabiert $\mathbf{PH}$ (d.h. $\mathbf{PH} = \Sigma_k^p$ für ein $k \geq 1$).

Aufgabe 32 (schriftlich, 10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $\mathbf{PH} = \Sigma_k^p$

(ii) $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$

(iii) $\Sigma_{k+1}^p = \Sigma_k^p$

(iv) $\Pi_{k+1}^p = \Pi_k^p$

Aufgabe 30

Betrachten Sie folgenden probabilistischen Algorithmus RANDOMWALK:

Eingabe: Boolesche Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$ in KNF
  sei h eine bel. Belegung, z.B. $h(x_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$
  while h erfüllt die Formel F nicht **do**
    wähle eine bel. Klausel C von F, die h nicht erfüllt
    wähle zufällig ein Literal l in C
    flippe den Wert von $h(l)$
  end
Ausgabe: h

Wir nehmen an, dass jede Klausel von F aus genau 2 Literalen besteht, und dass F eine erfüllende Belegung h_0 besitzt. Sei $t(i)$ die erwartete Anzahl von Schleifendurchläufen, falls die Anfangsbelegung h in genau i Variablen einen anderen Wert als h_0 hat. Zeigen Sie:

a) $t(0) = 0$ und $t(n) \leq t(n-1) + 1$.

b) $t(i) \leq 1 + (t(i-1) + t(i+1))/2$.

c) $t(i) \leq i(2n - i)$.

d) Für alle Formeln $F \in 2\text{-}SAT$ (o.B.d.A. genau 2 Literale pro Klausel) ist die erwartete Laufzeit von RANDOMWALK polynomiell beschränkt.