

Quanteninformatik

EXPERIMENTELLE REALISIERUNG (EIN ÜBERBLICK)

Seminararbeit

Marcel Lemke

mlemke@informatik.hu-berlin.de

Institut für Informatik, Humboldt Universität Berlin
Sommersemester 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Physikalische Betrachtungen	3
1.1	Veranschaulichung von Superpositionen	3
1.2	Welle-Teilchen-Dualismus	3
1.3	Weitere Quantenzahlen	5
1.4	Energetische Übergänge	7
1.5	Dirac-Schreibweise	8
2	Systemanforderungen	9
2.1	Skalierbarkeit	9
2.2	Qubits	9
2.3	Gatter	9
2.4	Harmonischer Oszillator	10
3	Überblick über Realisierungsansätze	11
4	Ionenfallen-Quantencomputer	12
4.1	Aufbau	12
4.2	Kühlung	13
4.3	Ein-Qubit-Rotation	14
4.4	Zwei-Qubit-Rotation	14
4.5	Controlled-Z	15
4.6	CNOT	16
4.7	Messung	16
5	Zusammenfassung, Ausblick	16

1 Physikalische Betrachtungen

.. zu den Bauteilen eines Quantencomputers

Aus Gründen der Komplexität des Themas können die physikalischen Zusammenhänge auf quantenmechanischer Ebene nicht im Detail aufgezeigt werden. Dieses Kapitel soll vielmehr aufbauend auf physikalischen Grundkenntnissen eine Idee davon geben, wie Superpositionszustände in gewissen Teilcheneigenschaften gespeichert und manipuliert werden können.

1.1 Veranschaulichung von Superpositionen

Ein anschauliches Beispiel einer Zustandsüberlagerung (Superposition) aus dem Alltag ist die Interferenz von Wasserwellen. Man kann etwa einen Finger der linken Hand (Wellenerreger#1) und der rechten Hand (Wellenerreger#2) nehmen und mit diesen Kreiswellen erzeugen. Die Wellen interferieren, das heißt die Amplituden der einzeln betrachteten Wellen addieren sich. Die Wellen können sich davon abgesehen ungehindert ausbreiten, so dass man sagen kann, dass sich die Wasseroberfläche in einem Zustand der Erregung#1 und der Erregung#2 befindet.

Man ist nun vielleicht geneigt sich zu überlegen, warum man nicht solche makroskopischen Wellenphänomene benutzt um hochparallele Rechner zu bauen, wie man sie sich von den Quantencomputern erhofft. Das Problem im Makroskopischen ist, dass zu jedem Zeitpunkt der Zustand des Systems bekannt ist. Man kann etwa mit Drucksensoren die Stärke der Erregung#1 sowie die der Erregung#2 messen und hat die Möglichkeit, abhängig vom Messergebnis neue Anregungen zu erzeugen. Aber schon das Messergebnis differiert zum quantenmechanischen: dort kann man nur entweder den Zustand#1 oder den Zustand#2 messen. Die Koeffizienten in der Superposition geben dabei die Wahrscheinlichkeit für das jeweilige Ergebnis an.

Letztlich wäre der makroskopische "Wellenrechner" ein Analogcomputer und kein digitaler, der mit verschränkten digitalen Zuständen arbeitet. Eine Kodierung von Werten muss daher im Makroskopischen anders erfolgen und ermöglicht keine quantenparallele Implementierung von Algorithmen.

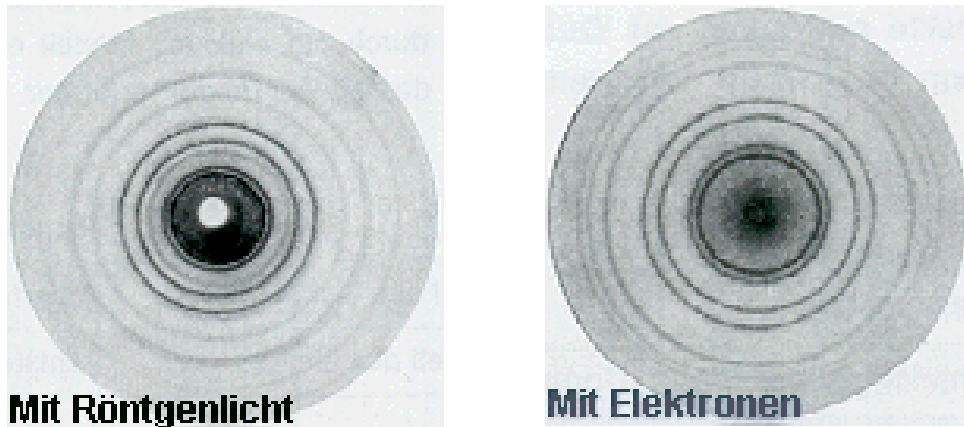
1.2 Welle-Teilchen-Dualismus

Zum Beginn des letzten Jahrhunderts konnten Teilcheneigenschaften beim Licht sowie Welleneigenschaften von Materie aufgezeigt werden.

Die Teilcheneigenschaft von Licht konnte durch den Photoeffekt nachgewiesen werden: eine Oberfläche wird mit Licht bestrahlt. Das Licht wird von der Oberfläche absorbiert, wodurch Elektronen angeregt werden (ihr Energieniveau erhöht sich). Reicht die Energie aus um das Elektron vom Atomrumpf zu lösen, wird das Elektron frei, kann in einem elektrischen Feld beschleunigt und schließlich nachgewiesen werden. Da die Energie von Licht proportional zu seiner Frequenz ist, nahm man an, dass es genügen sollte diese zu erhöhen um mehr Elektronen herauszulösen. Es zeigte sich jedoch, dass die Zahl der freiwerdenden Elektronen nur bei bestimmten Frequenzen des Lichts anstieg. Auf dieser experimentellen Beobachtung gründete die Lichtquantenhypothese. Diese Hypothese ging davon aus, dass Licht in Form von Teilchen absorbiert wird, wobei jedes Lichtteilchen (Photon) eine Energie $E = h\nu$ (mit $h \approx 6.63 \cdot 10^{-34} Js$, dem Planckschen Wirkungsquantum) besitzt.

Die experimentellen Ergebnisse lassen sich dann dadurch erklären, dass die Lichtteilchen jeweils von *einem* Elektron vollständig absorbiert werden und die überschüssige Energie (welche nicht zum Herauslösen der Atome benötigt wird) in kinetische Energie der Elektronen übergeht oder durch ein neu emittiertes Photon wieder frei wird. Die Energie des emittierten Photons genügt jedoch nicht, um ein weiteres Elektron aus der Oberfläche zu lösen.

Andersherum lassen sich die Welleneigenschaften von Elektronen dadurch zeigen, dass z.B. eine Silberfolie statt mit Licht im Röntgenbereich mit einem Elektronenstrahl beschossen wird. Bei der "Belichtung" mit dem Elektronenstrahl ergibt sich ein Beugungsbild, welches dem bei der Röntgenstrahlbelichtung entstehendem Bild sehr ähnlich sieht:

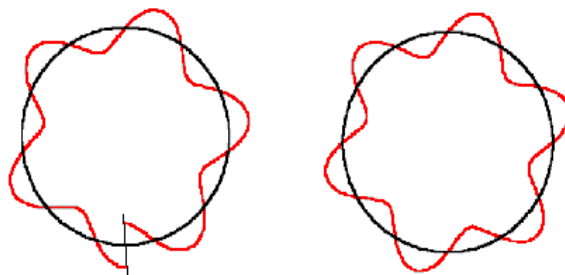


Ob nun Licht, Elektronen o.ä. als Wellen oder als Teilchen wahrgenommen werden, hängt vom Messprozess ab. Ist dieser darauf ausgerichtet, einzelne Teilchen zu detektieren, so macht sich die Welleneigenschaft als Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Teilchen bemerkbar. Erst durch das Sammeln genügend vieler Messergebnisse in einem Histogramm lässt sich die Welleneigenschaft wieder zeigen.

1.2.1 Quantenzahlen eines Elektrons

Bei der Beschleunigung einer bewegten Ladung (die Kreisbewegung eines Elektrons um einen Kern ist eine solche) müsste eigentlich Bremsstrahlung auftreten, wodurch die Ladung kinetische Energie verliert. Dies ist bei Elektronen jedoch *nicht* zu beobachten (klassisch gesehen müsste das Elektron dann in den Kern stürzen).

Niels Bohr stellte die Hypothese auf, dass sich die Elektronen auf diskreten Bahnen um den Kern bewegen auf denen diese keine Energie abgeben. Anschaulich lässt sich dies mit der DeBroglie-Wellenlänge erklären: die Wahrscheinlichkeitswelle des Elektrons darf nicht verschwinden. Das heisst, dass die Bahnlänge ein Vielfaches der DeBroglie-Wellenlänge sein muss, so dass diese nicht mit sich selbst zu 0 interferiert.



(Bild links: Bahnlänge kein Vielfaches der DeBroglie-Wellenlänge \Rightarrow Wahrscheinlichkeitswelle interferiert zu 0, das Elektron hätte nie existiert. Bild rechts: Elektron bewegt sich auf einer strahlungsfreien Bahn)

Die DeBroglie-Wellenlänge ist recht einfach durch eine Analogie zwischen dem Impuls eines Photons und dem eines Elektrons herzuleiten:

$$\text{relativistische Energie: } E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \quad p = m v, m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Photon <small>m=0</small>	Teilchen mit $m > 0$ <small>v klein, p = m₀ · v klein</small>
$E = h \cdot \nu = p \cdot c$	$E \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$ $= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$ <small>h ≈ 6.63 · 10⁻³⁴ Js</small>
$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$	$p = m \cdot v$
$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{p}$	⇒ DeBroglie-Wellenlänge: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$ <small>andere Herleitungen für Quantisierungen zeigen Übereinstimmung mit postulierter Wellenlänge</small>

Die in der Tabelle gezeigte Gleichung für die Energie des Photons konnte mit dem Photoeffekt gezeigt werden. Die Energie des Elektrons entspricht der bekannten Gleichung aus der klassischen Physik zzgl. der Ruheenergie (in der Annahme, dass $v \ll c$ und relativistische Effekte damit vernachlässigbar sind). Der Impuls des Photons ergibt sich aus der relativistischen Energie, der des Elektrons entspricht der aus dem Physikunterricht bekannten Beziehung.

Für die DeBroglie-Wellenlänge setzt man dann einfach an, dass sich wie beim Photon die Wellenlänge aus dem Quotienten von h (Plancksches Wirkungsquantum) und dem Impuls p ergibt. Andere Herleitungen für die Quantisierungen auf mikroskopischer Ebene zeigen eine Übereinstimmung mit diesem Ergebnis.

1.3 Weitere Quantenzahlen

Neben dem diskreten Energieniveau eines (im Atom) "gefangenen" Elektrons gibt es noch weitere *messbare* Eigenschaften eines solchen Elektrons.

Wichtig ist dabei der Zusatz "messbar", da im Unterschied zur Klassischen Mechanik nicht alle mechanischen Eigenschaften gleichzeitig scharf gemessen werden können. Der Grund dafür liegt in der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, welche sich auch auf andere Größen überträgt.

Diese messbaren Eigenschaften sind

- Betrag des Bahndrehimpulses
- z-Komponente des Bahndrehimpulses
- Eigendrehimpuls (Spin)

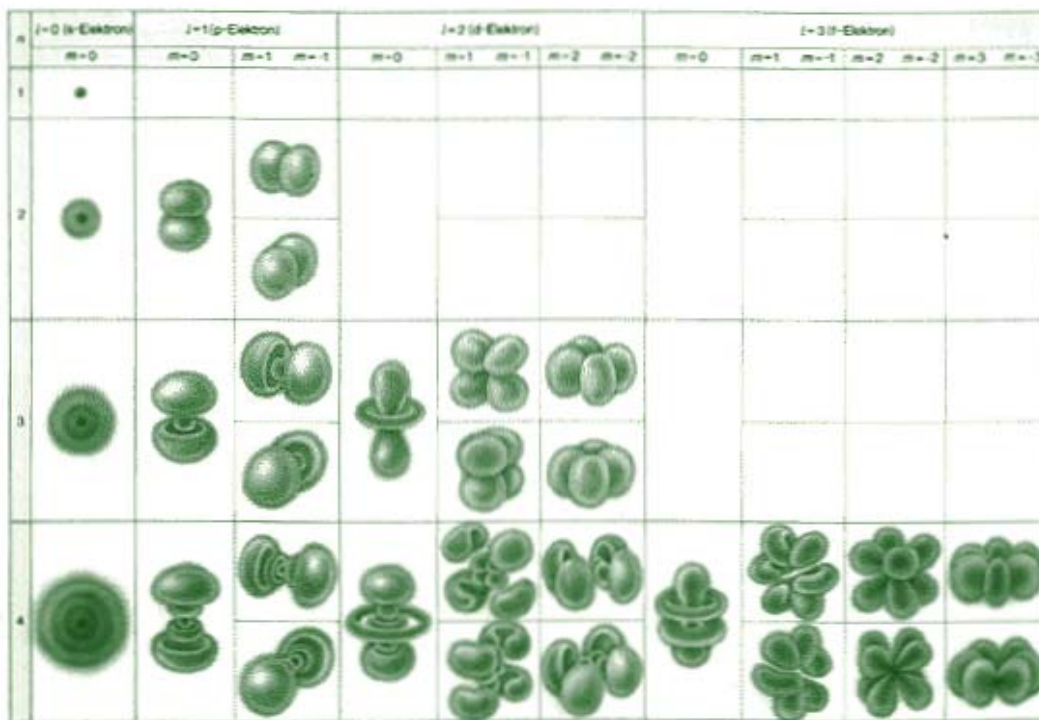
Die einzelnen Komponenten des vektoriellen Bahndrehimpulses lassen sich z.B. nicht scharf messen. Dass man gerade die z-Komponente messen kann ergibt sich lediglich aus der Konvention, dass immer durch eine Projektion des Drehimpulses auf eine beliebig in das Laborsystem gelegte z-Achse misst. Da aber auch der Betrag des Bahndrehimpulses bekannt ist, lässt sich sagen auf welchem räumlichen Kreis der vektorielle Drehimpuls liegt. Die bleibende Unbekannte dabei ist eine nicht messbare Phase.

Da auch die Drehimpulsgrößen diskrete Werte besitzen, beschreibt man die Elektroneneigenschaften anhand von natürlichen Zahlen:

- Hauptquantenzahl n – Energieniveau E_n :
 $n \in \mathbb{N} > 0 \quad E_n = -\frac{E_{Rydberg}}{n^2}$
- Nebenquantenzahl l – Betrag des Bahndrehimpulses \vec{L} :
 $l \in \{0, \dots, n-1\} \quad |\vec{L}|^2 = \hbar l(l+1)$
- magnetische Quantenzahl m – z-Komponente von \vec{L} :
 $m \in \{-l, \dots, l\} \quad L_z = \hbar m$ Wellenfunktion:
 $\psi_{n,l,m}(\vec{r})$
- Spin s :
 $s \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$

(Photonen: $s \in \{-1, 1\}$ – links/rechts-zirkular polarisiert)

In Abhängigkeit von diesen Quantenzahlen ergeben sich wie folgt aussehende Elektronenorbitale:



(Die gezeigten Flächen geben eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit von 0 für die Elektronen an.)

Man kann sich die einzelnen Elektronen verteilt auf eine Elektronenwolke vorstellen, in welcher es sich irgendwo entsprechend der ortsabhängigen Aufenthaltswahrscheinlichkeit befinden kann. Erst ein Messprozess legt den Ort des Teilchens fest.

1.4 Energetische Übergänge

Elektronen können in ihrem Energieniveau angehoben werden, indem etwa die Atome thermisch zum Schwingen angeregt werden. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wird auf die Elektronen ein Teil E_A der kinetischen Energie der Atome durch Atom-Atom-Wechselwirkungen übertragen. Diese Anregungsenergie kann früher (instabile Zustände) oder später (metastabile Zustände) wieder durch Emission eines Photons mit der Frequenz $\nu = E_A/h$ abgegeben werden.

Die beim Übergang von Energieniveau n auf m ($n > m$) freiwerdende Energie lässt sich ausdrücken durch

$$E = E_{Rydberg} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

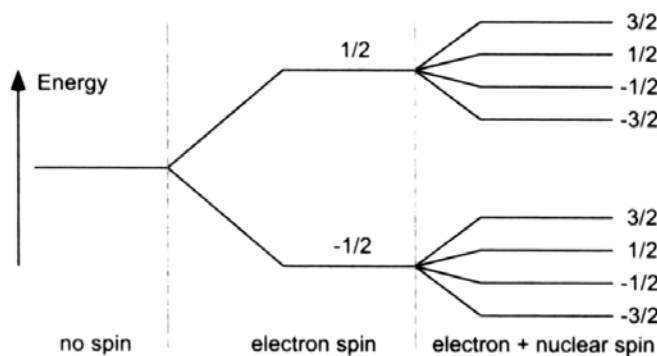
Die einzelnen Übergänge können spektroskopisch sichtbar gemacht werden. Im folgenden Bild ist die Balmer-Serie zu sehen: die Übergänge des Wasserstoffelektrons von Energieniveau n auf Energieniveau $m = 2$.



Umgekehrt ist es auch möglich, dass ein Elektron mit einem Photon wechselwirkt (es absorbiert) und dadurch im Energieniveau angehoben wird. Dies wurde bereits beim Photoeffekt angesprochen.

Die Energiezustände sind jedoch nicht nur durch die Energieniveaus gegeben. Vielmehr kommt ist die Energie eines Elektrons auch abhängig von der Ausrichtung von Bahndrehimpuls und Spin. Das Elektron ist eine bewegte Ladung, also ein Strom um den Kern. Dieses erzeugt ein Magnetfeld erzeugt (ähnlich einer Spule). Ebenso ist die Drehung des Elektrons um sich selbst (Spin) als Strom zu verstehen. Diese Magnetfelder wechselwirken miteinander oder mit einem äusseren Magnetfeld. In beiden Fällen kommt es zu einer sogenannten Energieaufspaltung: die Energie des Elektrons ist geringer, wenn sich die Drehimpulse so ausrichten, dass die Magnetfelder entgegengesetzt ausgerichtet sind.

Veranschaulichung der Energieaufspaltung:



Man sieht in der Grafik die leichte Änderung der Energie in Abhängigkeit von Elektronen- und Kernspin. Der Kernspin ist der Eigendrehimpuls des Atomkerns und kann beim gezeigten Atom $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ betragen.

1.5 Dirac-Schreibweise

Es soll nun wieder die Beziehung zwischen den experimentell-anschaulichen Wellenfunktionen und deren zeitliche Entwicklung sowie der in der theoretischen Physik und theoretischen Informatik üblichen Dirac-Notation hergestellt werden:

Wellenfunktionen:

- beschreiben einen Systemzustand
 $|\psi(\vec{r})|^2$: Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen
 $|\sigma(\uparrow)|^2$: Wahrscheinlichkeit für Spin $s = \frac{1}{2}$
- sind durch Superposition aus Eigenfunktionen $\psi_{n,l,m}$ darstellbar
- Dirac-Schreibweise:
 $\psi(\vec{r}) = \alpha\psi_{n,l,m}(\vec{r}) + \beta\alpha\psi_{n+1,l,m}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad |\psi\rangle = \alpha|n, l, m\rangle + \beta|n+1, l, m\rangle$

Die Wellenfunktionen (Zustände) lassen sich sowohl in endlich- als auch unendlichdimensionalen Eigenräumen (der durch die Eigenfunktionen aufgespannte Raum) als Summe von Eigenfunktionen angeben. Ob das aber im unendlichdimensionalen Raum sinnvoll möglich ist, hängt vom betrachteten Zustand ab.

Operatoren:

- wirken auf Wellenfunktionen, beschreiben die zeitliche Entwicklung von Systemzuständen
- Wechselwirkungen (Gatter, Störungen): beschrieben durch Hamilton-Operator
- Hamilton-Operator:
Herleitung über Schrödingergleichung, abhängig von Teilchenmasse und Potential
- zeitliche Entwicklung wird ausgedrückt durch den Operator $T = \exp(-iHt)$
- Dirac-Schreibweise:
 $\psi'(\vec{r}) = T\psi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad |\psi'\rangle = T|\psi\rangle \quad \text{mit } T \text{ als Matrix}$

2 Systemanforderungen

2.1 Skalierbarkeit

Um möglichst komplexe Rechnungen durchführen zu können, sollten natürlich möglichst viele Qubits mit möglichst vielen Gattern verschaltbar sein.

Nach einer Schätzung von Ignacio Cirac werden etwa 10^4 Qubits benötigt, um damit Rechnungen durchführen zu können, in denen Quantencomputer den klassischen überlegen sind.

Die Einschränkungen bei der Grösse der Quantencomputer ergibt sich zum einen aus der Instabilität von Quantenzuständen, aber auch aus implementationsabhängigen Schwierigkeiten.

Für die Instabilität von Zuständen gibt es zwei Gründe:

1. Dissipation: Austausch von Energie mit der Umgebung $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ (T_1 -Relaxationszeit)
2. Dekohärenz: gegenseitige Beeinflussung von Phasen (T_2 -Relaxationszeit)

Die Relaxationszeiten geben die mittlere Zeit für das Eintreten einer Zustandszerstörung an. Im Allgemeinen ist $T_1 \ll T_2$, so dass man nur die Dekohärenz bei Störungsbetrachtungen berücksichtigt.

2.2 Qubits

1. Das System muss zwei Eigenzustände bereitstellen.
2. Stehen mehr als die zwei Eigenzustände bereit, so darf das System nicht in diese übergehen. (Zum Beispiel wenn die Qubits in den Energieniveaus von Elektronen kodiert werden.)
3. Das System muss soweit gegen äussere Einflüsse abgeschottet sein, dass Superpositionen während der Rechnung nicht zerstört werden. Die Rechnung muss also innerhalb der Dekohärenzzeit durchführbar sein.

2.3 Gatter

1. Es muss ein universeller Satz von Gattern verfügbar sein, so dass sämtliche unitäre Transformationen durchführbar sind. (Bspw. zwei Einzel-Qubit-Rotationen und das CNOT)
2. Die Gatter müssen kaskadierbar sein.
3. Die Gatterlaufzeit τ_{op} muss sehr viel kleiner als die Dekohärenzzeit $\tau_Q = \tau_2$ sein.

Für die Realisierung der Gatter werden schaltbare Wechselwirkungen benötigt, mit denen sich die Qubits von aussen gezielt manipulieren lassen.

Bei den Einzel-Qubit-Rotationen soll diese Wechselwirkung nur mit *einem* Qubit stattfinden (andere sollen nicht betroffen sein), bei Zwei-Qubit-Gattern wie dem CNOT hingegen sollen *zwei* Qubits möglichst stark miteinander wechselwirken.

In der Theorie werden die Gatter durch Operatoren dargestellt, die sich aus dem Hamilton-Operator ableiten lassen. Sie wirken auf zustandsbeschreibende Funktionen (Wellenfunktionen) und geben so über die zeitliche Entwicklung des Systemzustands Auskunft.

Auch störende Einflüsse, die zu Dekohärenz führen, gehen in den Hamilton-Operator ein und werden so mitberücksichtigt.

2.4 Harmonischer Oszillator

Als einführendes Beispiel für einen Quantencomputer soll ein Elementarteilchen in einem Harmonischen Potential ($V(x) \sim x^2$) dienen (ein Teilchen in einem solchen Potential ein sogenannter Harmonischer Oszillator).

Wie bei einem Elektron, welches sich um einen Atomkern bewegt, besitzt das Teilchen im Harmonischen Potential diskrete Energieniveaus, da Δx auch hier wieder ein Vielfaches der DeBroglie-Wellenlänge des Teilchens sein muss.

$$(\Delta x = x_{rechts} - x_{links} \text{ und } V(x_{links}) = V(x_{rechts}) = E_{Teilchen})$$

Mit $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ergibt sich für den Hamilton-Operator

$$H = \frac{(-\hbar\partial_x)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (\text{Herleitung: Quantenmechanik})$$

Da gleichzeitig 2 Qubits in diesem Harmonischen Oszillator gespeichert werden sollen, wird folgende logische Darstellung eingeführt:

$$\begin{aligned} |00\rangle_L &= |0\rangle \\ |01\rangle_L &= |2\rangle \\ |10\rangle_L &= (|4\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \\ |11\rangle_L &= (|4\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \end{aligned}$$

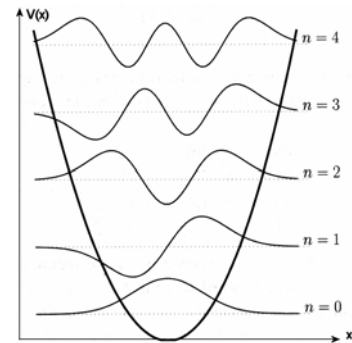
Dies ist ohne weiteres möglich, da die Basis in der gemessen wird nur vom Messvorgang selbst abhängt (welcher natürlich auch in der entsprechenden Form realisierbar sein sollte).

Der Zeitentwicklungsoperator lässt sich aus dem Hamilton-Operator ableiten: $T = \exp(-iHt)$.

In Matrix-Darstellung ergibt sich mit $t = \pi/\hbar\omega$ für die unteren fünf Zustände:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Phase der Zustände $|1\rangle$ und $|3\rangle$ wird also um 180° gedreht. Der Vorzeichenwechsel des Zustands $|1\rangle$ entspricht in der logischen Basis einem CNOT.



3 Überblick über Realisierungsansätze

Um den möglichen Einfluss von Störungen zu reduzieren, kodiert man die Qubits vorzugsweise in Systemen, die nur zwei Eigenzustände besitzen.

Die vorgeschlagenen und zum Teil auch realisierten Systeme basieren meist auf

- polarisierten Photonen (optischer Quantencomputer)
- Spin (von Elektron oder Kern) (Ionenfalle, NMR, optischer Resonator)
- Ladungen (Quantenpunkte, Josephson-Kontakte)

In der nachfolgenden Tabelle aus [NICH00] sind die Größenordnungen der Gatterlaufzeiten und Dekohärenzzeiten für verschiedene Implementierungen gelistet. Da die Gatter bei allen Implementierungen nacheinander (seriell) abgearbeitet werden, ergibt sich die maximale Anzahl der durchführbaren Gatteroperationen aus dem Quotienten von Gatterlaufzeit und Dekohärenzzeit.

(Quelle: Nielsen/Chuang)

System	τ_Q	τ_{op}	$n_{op} = \lambda^{-1}$
Nuclear spin	$10^{-2} - 10^8$	$10^{-3} - 10^{-6}$	$10^5 - 10^{14}$
Electron spin	10^{-3}	10^{-7}	10^4
Ion trap (In^+)	10^{-1}	10^{-14}	10^{13}
Electron – Au	10^{-8}	10^{-14}	10^6
Electron – GaAs	10^{-10}	10^{-13}	10^3
Quantum dot	10^{-6}	10^{-9}	10^3
Optical cavity	10^{-5}	10^{-14}	10^9
Microwave cavity	10^0	10^{-4}	10^4

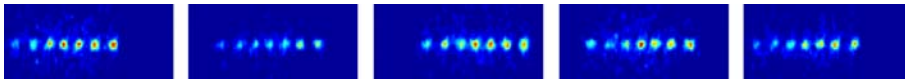
Die Anzahl möglicher Operationen sehen bei NMR (erste Zeile) und Ionenfallen (dritte Zeile) natürlich vielversprechend aus. Probleme ergeben sich jedoch bei beiden beim Erhöhen der Anzahl der Qubits. Bei NMR ist die Signalstärke proportional zu 2^{-n} , fällt damit also schnell unter die Messgenauigkeit der verfügbaren Messgeräte. Bei den Ionenfallen dagegen gestaltet sich das Koppeln vieler Ionen als schwierig.

Die ladungsbasierten Ansätze (Tabelle: Zeilen 4-6) lassen sich wohl am einfachsten mit den Schaltkreisen klassischer Computer verbinden. Leider wechselwirken auf einem Trägermaterial aufgebrachte Strukturen recht stark mit ihrer Umgebung, so dass die Dekohärenzzeiten recht klein sind.

4 Ionenfallen-Quantencomputer

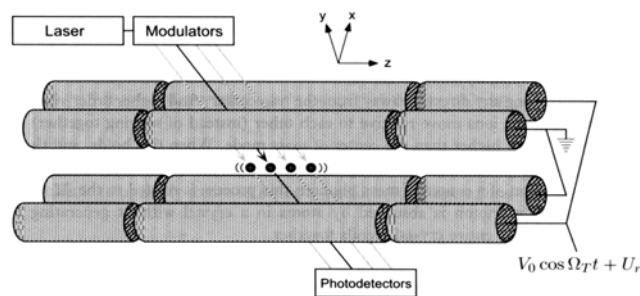
Die Grundidee beim Ionenfallen-Quantencomputer ist es, mehrere Ionen in einem elektrischen Potential zu fangen und in jedem Ionen-Kernspin ein Qubit zu kodieren. Der Vorteil der Speicherung im Kernspin ist die Abschirmung des Kerns durch die Elektronen von der Umgebung. Dadurch hat der Kernspin eine recht lange Dekohärenzzeit.

Um 2-Qubit-Gatter realisieren zu können wird die gemeinsame Schwingung der Ionen genutzt (die mit kleinster Frequenz, die sogenannte Schwerpunktsmode). Eine solche Schwingung mit recht grosser Amplitude ist in der folgenden Bildfolge zu sehen:



4.1 Aufbau

Da mit elektrostatischen Feldern kein Potentialminimum frei im Raum erzeugt werden kann (Earnshaw-Theorem), bedient man sich elektrodynamischer Felder, welche durch vier unterteilte Elektroden erzeugt werden:



Zunächst wird ein statisches Feld in dadurch erzeugt, dass die Enden der Elektroden auf ein höheres Potential gelegt werden als die Mittelstücke. Mit einer Wechselspannung an den Mittelstücken zweier diagonal angeordneter Elektroden wird ein effektives Minimum in xy-Richtung erzeugt. Dies lässt sich anhand der Bewegungsgleichungen der Ionen zeigen.

Anschaulich sieht das dann so aus (hellere Bereiche \equiv höheres Potential):



4.2 Kühlung

Um den Zustand des Quantencomputers zu präparieren ist eine Kühlung bis nahe dem Grundzustand nötig. Gleichzeitig muss man erreichen, dass die Schwingungsamplituden der Ionen kleiner werden als die Laserwellenlänge zur Manipulation der Qubits (Lamb-Dicke-Kriterium). So wird eine starke Kopplung zwischen einem einzelnen Ion und dem Laserstrahl erreicht.

Die erforderliche Kühlung wird durch zwei laserbasierte Verfahren erreicht: Dopplerkühlung und Seitenbandkühlung. Diese sollen noch etwas näher erläutert werden. Ergänzend kann die sympathetische Kühlung genannt werden, bei welcher die für den Quantencomputer verwendeten Ionen mit Hilfe anderer Ionen gekühlt wird. Auf diese Weise versucht man auch, das Bust-Qubit *während* der Rechnung zu kühlen (wenn das Qubit gerade nicht verwendet wird).

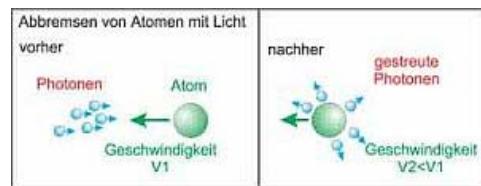
4.2.1 Dopplerkühlung

Der Laser wird so gestimmt, dass seine Frequenz unterhalb einer Übergangsfrequenz eines Ionenelektrons liegt. (die Übergangsfrequenz ergibt sich aus der Energie, die für den Übergang von einem Zustand diskreter Energie zu einem anderen Zustand mit diskreter Energie benötigt wird)

Durch den von Schallwellen her bekannten Dopplereffekt nehmen Ionen, welche sich dem Laser entgegenbewegen, das Licht mit einer höheren Frequenz wahr. Für die Elektronen von Ionen mit entsprechend hoher Geschwindigkeit hat das Photon dann genügend Energie um einen Zustandsübergang zu induzieren.

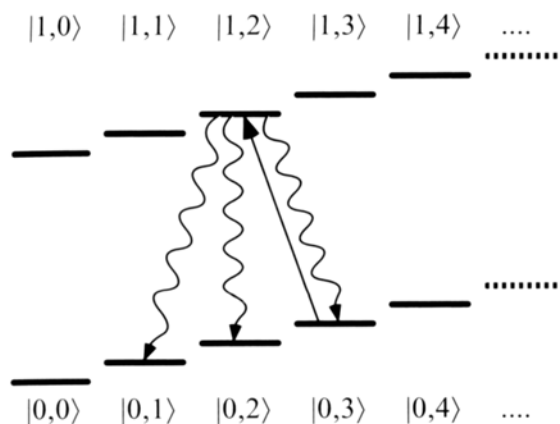
Da neben der Energieerhaltung auch die Impulserhaltung erfüllt sein muss (Photonen besitzen einen Impuls - siehe Seite 5), nimmt das Ion den Impuls des Photons auf. Vom Laborsystem aus betrachtet verringert sich dadurch $m_{Ion} \cdot v_{Ion}$.

Das bei der Abregung des Elektrons ausgesendete Photon erhält zwar auch einen Impuls, doch kann dieses Photon in jede mögliche Richtung emittiert werden. Somit ist die emissionsbedingte Geschwindigkeitsänderung im Mittel 0. Die Kühlung wird in alle drei Raumrichtungen durchgeführt, so dass das Ion quasi im Licht "steckenbleibt".



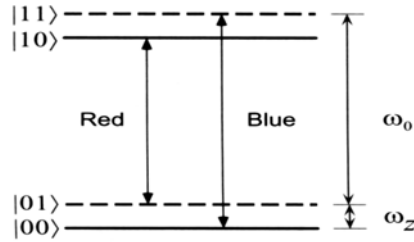
4.2.2 Seitenbandkühlung

Bei der Seitenbandkühlung wird die Schwingungsenergie der Ionenkette mitbetrachtet: die Laserfrequenz wird so eingestellt, dass bei der Anregung eines Elektrons auch ein Schwingungsquant absorbiert wird. Wie bei der Dopplerkühlung ist der mittlere Impuls des daraufhin emittierten Photons 0. Im Mittel wird die Energie der Ionenkette also um ein Schwingungsquant verringert.



4.3 Ein-Qubit-Rotation

Im hier gezeigten Energieschema sind die relevanten Übergänge der Ionen zu sehen:



Die Zustände von Kernspin (s) und Schwerpunktsmode (n) wurden hier in $|s n\rangle$ zusammengefasst.

Wird Licht der Wellenlänge $\omega = \omega_0$ mit Phase φ auf das Ion eingestrahlt, so kann es von Zustand $|00\rangle$ zu $|10\rangle$ sowie von Zustand $|01\rangle$ zu $|11\rangle$ übergehen. Der umgekehrte Übergang ist durch stimulierte Emission genauso wahrscheinlich. Je länger das Ion dem Strahl ausgesetzt wird, umso wahrscheinlicher wird der Übergang. Wie weit die Phase in der von den Zuständen $|00\rangle, |10\rangle$ bzw. $|01\rangle, |11\rangle$ aufgespannten Ebenen ist, hängt daher von der Einstrahldauer t ab. Um welche Achse dabei gedreht wird, hängt von der Phase des Laserlichts ab.

Auf diese Weise lassen sich mit dem Zeitentwicklungsoperator $T = \exp(-i(H_{\text{Falle}} + H_{\text{Field}}) \cdot t)$,

$$H_{\text{Field}} = \frac{\hbar\Omega}{2} \left(S_+ e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + S_- e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} \right) \quad (\Omega - \text{Potentialparameter})$$

bei geeigneter Wahl von φ und t die beiden Qubit-Rotationen $R_x(\theta)$ und $R_y(\theta)$ realisieren:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad R_y(\pm\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \mp 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus diesen beiden Rotationen lassen sich alle unitären Ein-Qubit-Operationen zusammensetzen.

Theorem: Für jede Ein-Qubit-Operation U existieren $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, so dass

$$U = e^{i\alpha} R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta) \quad (\text{Beweis: siehe [NICH00]})$$

Bsp. Hadamardgatter:

$$H = e^{i3/2\pi} R_x(\pi) R_y(3/2\pi)$$

4.4 Zwei-Qubit-Rotation

Analog zur Ein-Qubit-Rotation lässt sich auch eine Zwei-Qubit-Rotation zwischen einem lokalen Qubit und dem Busqubit durchführen.

Dafür benutzt man als Laserfrequenz $\omega = \omega_0 + \omega_z$ (bzw. $\omega = \omega_0 - \omega_z$), so dass in der von den Zustandsvektoren $|00\rangle, |11\rangle$ (bzw. $|01\rangle, |10\rangle$) aufgespannten Ebene um die x- oder y-Achse gedreht wird.

Mit einer Zwei-Qubit-Rotation lässt sich ein SWAP zwischen lokalem Qubit und Busqubit durchführen, indem man eine $R_y(\pi)$ -Rotation im Raum von $|01\rangle$ und $|10\rangle$ durchführt. Im 4-Zustandsraum stellt sich die Operatormatrix wie folgt dar:

$$R_{2y}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

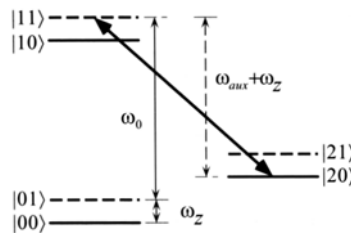
Dies ist zwar kein perfektes SWAP, doch lässt sich die Auswirkung der Phasendrehung eines Qubits dadurch vermeiden, dass man nach einem SWAP mit $R_{2y}(\pi)$ ein SWAP mit $R_{2y}(-\pi)$ durchführt.

4.5 Controlled-Z

Der kontrollierte Phasenflip besitzt die folgende Matrixdarstellung:

$$C(Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Experimentell wird dieser mit Hilfe eines dritten Zustands realisiert.



Durch eine Drehung $R_x(2\pi)$ im Raum von $|11\rangle, |20\rangle$ wird die Phase des Zustands $|11\rangle$ gedreht ohne die anderen Zustände zu beeinflussen. (mit der Frequenz $\omega_{aux} + \omega_z$ ist kein anderer Übergang möglich)

4.6 CNOT

Ein CNOT lässt sich mit Hilfe der bereits vorgestellten Gatter realisieren:

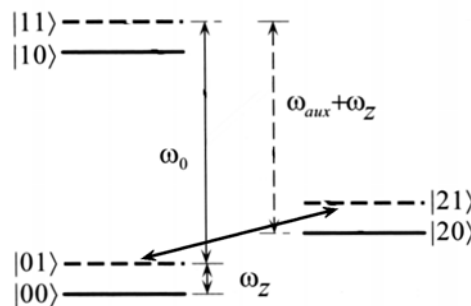
Gatter	Ziel
$R2_y(\pi)$	m -tes Ion & Bus-Qubit
$R_y(\pi/2)$	n -tes Ion
$C(Z)$	n -tes Ion, Bus-Qubit
$R_y(\pi/2)$	n -tes Ion
$R2_y(-\pi)$	m -tes Ion & Bus-Qubit

Das erste sowie das letzte Gatter tauschen das m -te lokale Qubit mit dem Bus-Qubit.

Die mittleren drei Gatter sind ein CNOT auf das m -te Ion mit dem Bus-Qubit als Kontrollbit.

4.7 Messung

Zur Ermittlung des Ergebnisses wird eine Fluoreszenzmessung durchgeführt. Dafür wird wieder ein dritter Zustand zu Hilfe genommen.



Als Laserfrequenz wird ω_{aux} benutzt, so dass Übergänge zwischen $|10\rangle$ und $|20\rangle$ sowie zwischen $|11\rangle$ und $|21\rangle$ möglich sind. Die mit einem Photomultiplier (Einzelphotonendetektor) gemessene Lichtintensität ist dann proportional zur Wahrscheinlichkeit, mit der sich das Ion-Qubit im Zustand $|1\rangle$ befindet.

(steht im Nielsen, aber: widerspricht das nicht dem Prinzip des Wellenkollaps? Sache konnte mit HU-Physikern noch nicht vollständig geklärt werden.)

5 Zusammenfassung, Ausblick

Die Qubits werden in den Hyperfeinzuständen von Ionen (Energieniveaus, die sich durch kernspinbedingte Energieaufspaltung ergeben) kodiert. Zur Kopplung der Ionen wird die Schwerpunktschwingung genutzt. Sie wird als Bus-Qubit bezeichnet.

Die Ionen werden in einem elektrodynamischen Potential gefangen, welches effektiv ein Potentialminimum im Raum erzeugt. Die Parameter der Ionenfalle werden so gewählt, dass sich die Ionen in einer stabilen linearen Kette anordnen.

Die Gatter werden durch Laserbestrahlung mit definierter Frequenz, Dauer sowie Phase realisiert.

Die in den Kernspins kodierten Qubits sind hingegen sehr gut von ihrer Umgebung abgeschirmt und haben deswegen eine sehr grosse Dekohärenzzeit ($10^{-2} - 10^8$ s).

Am störempfindlichsten am Ionenfallen-Quantencomputer ist das Bus-Qubit. Durch Instabilitäten des Potentials kommt es hier relativ schnell zu Dekohärenz. Dies ist einer der Gründe, warum nicht besonders viele Ionen in einer Falle gehalten werden können um damit quantenparallele Rechnungen durchzuführen.

Im Bereich der Ionenfallen-Quantencomputer geht es daher vor allem darum, die Dekohärenzzeit des Bus-Qubits zu senken. Es wird zum einen daran geforscht, das Bus-Qubit *während* der Rechnung zu kühlen (↗ sympathetische Kühlung) als auch daran, mehrere Ionenfallen in einer Anordnung unterzubringen und diese interagieren zu lassen.

Literatur

- [NICH00] Nielsen, Chuang: Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press.
- [WICL98] Williams, Clearwater: Explorations in QUANTUM COMPUTING. Springer-Verlag.
- [HYLW99] Heung-Yeung, Li-Wei: Ein atomarer Abakus. Physik Journal 1/2004. WILEY-VCH.