Institut für Informatik
Komplexität und Kryptografie
Prof. Dr. Johannes Köbler

Sommersemester 2004
9. Juni 2004

Theoretische Informatik III

5. Übung

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 1. Juli 2004

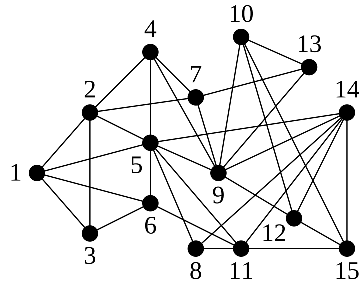
Aufgabe 33 [mündlich]

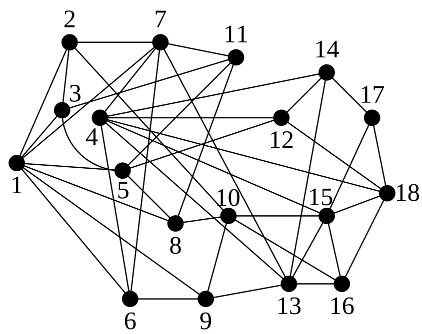
1. Sind alle 4-färbbaren Graphen planar? Beweisen Sie ihre Behauptung.
2. Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem man überprüfen kann, ob ein Graph bipartit, d. h. 2-färbbar, ist.
3. Was ist die chromatische Zahl eines Baumes? Geben Sie einen Beweis an.

Aufgabe 34 [4 Punkte]

Definition: Sei G ein Graph. Sei v ein Knoten mit Grad zwei in G mit den beiden Nachbarknoten u und w. Durch *Überbrückung* von v entsteht der Graph $G' := (G - \{v\}) \cup \{\{u, w\}\}$, bei dem gegenüber G der Knoten v und die Kanten $\{u, v\}$ und $\{v, w\}$ fehlen und die Kante $\{u, w\}$ enthalten ist.
Definition: Seien G und H Graphen. Dann bezeichnen wir G als *Unterteilung* von H, wenn durch sukzessives Überbrücken von Knoten mit Grad zwei aus G ein Graph G' erzeugt werden kann, der zu H isomorph ist.
Satz (Kuratowski): Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung des $K_{3,3}$ und K_5 als Teilgraph besitzt.

Sind die nebenstehenden Graphen planar? Geben Sie eine Begründung unter Benutzung des vorigen Satzes an. (Verwenden Sie dabei die vorgegebene Nummerierung der Knoten.)

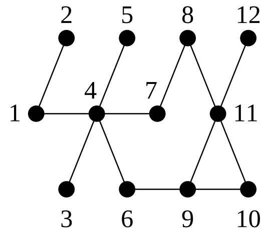




Aufgabe 35 [mündlich]

Im Folgenden betrachten wir den Tiefensuche-Algorithmus. Vor dem ersten Aufruf von Tiefensuche haben alle Knoten die Farbe weiss. Die Prozedur Tiefensuche wird mit einem Graphen und einem (beliebigen) Knoten dieses Graphen aufgerufen.

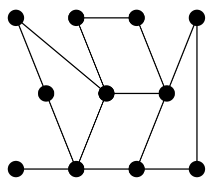
TIEFENSUCHE(G, v)
    Farbe$[v] \leftarrow$ grau
    foreach $u \in V$: es gibt eine Kante von v nach u **do**
        if *Farbe*$[u] =$ weiss **then**
            TIEFENSUCHE(G, u)
    Farbe$[v] \leftarrow$ schwarz

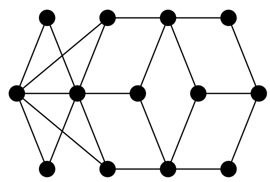


1. Geben Sie für obigen Graphen die Reihenfolge an, in der die Knoten (und Kanten) bei einer Tiefensuche beginnend bei Knoten 1 durchlaufen werden. Bei Wahlmöglichkeit soll zunächst der Nachbarknoten mit der kleinsten Nummer gewählt werden.
2. Woran kann man bei der Tiefensuche am obigen Graphen erkennen, dass er einen Kreis enthält? (Hinweis: Welche Farbe besitzt der Knoten, bei dem sich während der Tiefensuche ein Kreis schließt?)
3. Was bedeuten die Farben weiss, grau und schwarz im Verlauf des Algorithmus?
4. Beantworten Sie die Teilaufgaben 2 und 3 für einen beliebigen Eingabegraphen G. Betrachten Sie auch den Fall, dass G gerichtet ist.

Aufgabe 36 [4 Punkte]

1. Sind die nebenstehenden Graphen bipartit, d. h. 2-färbbar? Begründen Sie Ihre Behauptung.

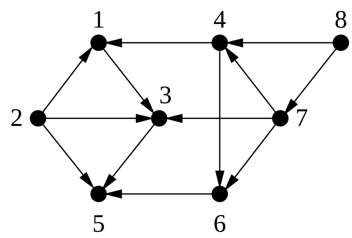




2. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Aufgabe 37 [4 Punkte]

Definition: Eine *topologische Sortierung* eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Anordnung $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$ seiner Knoten $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, so dass für alle Kanten (v_{i_j}, v_{i_k}) gilt $j < k$.



1. Geben Sie eine topologische Sortierung der Knoten des obigen Graphen an.
2. Welchen Typ (bzgl. Eingangsgrad) besitzt der Knoten, der in der topologischen Sortierung der vorigen Teilaufgabe am Anfang steht? Warum muss das so sein?
3. Zeigen Sie, dass ein gerichteter Graph G genau dann eine topologische Sortierung besitzt, wenn er azyklisch, d. h. kreisfrei, ist.