Institut für Informatik
Komplexität und Kryptografie
Prof. Dr. Johannes Köbler

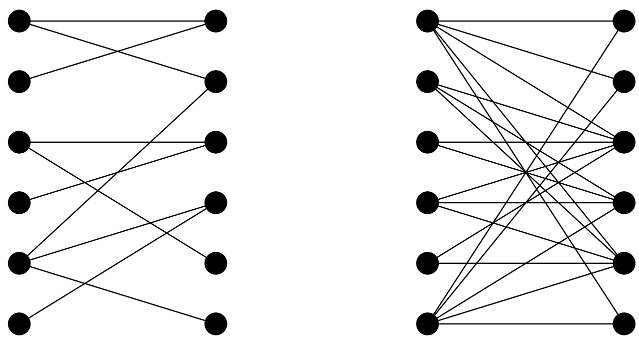
Sommersemester 2004
23. Juni 2004

Theoretische Informatik III

6. Übung

Aufgabe 1 [mündlich]

Gibt es in den beiden folgenden Graphen Matchings, deren Kanten jeweils alle Knoten überdecken? Begründen Sie ihre Antwort.



Aufgabe 2 [mündlich]

Beweisen Sie, dass der folgende Algorithmus ein kardinalitätsmaximales Matching M in einem gegebenen Baum T berechnet.

Procedure MaximumTreeMatching (T)

  Procedure MaximumSubtreeMatching (T,x)
    for $\{x, v\} \in E(T)$ *do* MaximumSubtreeMatching(T_v,v)
    if es gibt Kante $\{x, v\} \in E(T)$, so daß v unmarkiert ist
      then
        markiere x und v
        $M := M \cup \{x, v\}$

$M := \emptyset$
wähle einen beliebigen Knoten x als Wurzel von T
MaximumSubtreeMatching(T,x)

Anmerkungen: Die Wurzel x eines Baumes T ist ein ausgezeichneter Knoten, welcher häufig bei Suchalgorithmen Verwendung findet, um dort den Baum bzgl. eines festen Knotens zu strukturieren. Die Tiefe $h(T, x)$ ist definiert als die Exzentrizität der Wurzel. Der Teilbaum T_v eines Knotens v in (T, x) ist der Teil des Baumes, welcher sich von v aus 'nach unten erstreckt', d. h. formal: der von der Knotenmenge $U_v := \{u \in V(T) :$

$d(u,x) - d(u,v) = d(x,v)\}$ induzierte Teilgraph (d. h. alle Knoten u, so dass der kürzeste Weg von x nach u über den Knoten v führt).

Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion über $h(T,x)$ die stärkere Behauptung:

> Der Algorithmus findet ein kardinalitätsmaximales Matching und, falls eines existiert, welches die Wurzel nicht überdeckt, so wird dieses gefunden.

Aufgabe 3 [mündlich]

Agnetha und Benny wählen jeweils abwechselnd Knoten eines Graphen G derart, dass der gewählte Knoten ein Nachbar des im vorigen Zug vom Gegenspieler gewählten Knotens ist, aber selbst noch nicht zuvor gewählt wurde. Agnetha beginnt und der Spieler, welcher als letzter einen Knoten wählt, hat gewonnen.

1. G besitzt ein Matching, dessen Kanten alle Knoten überdecken. Geben Sie eine Gewinnstrategie für Benny an.
2. G besitzt kein Matching, dessen Kanten alle Knoten überdecken. Geben Sie eine Gewinnstrategie für Agnetha an.

Aufgabe 4 [mündlich]

Was ist falsch an folgendem Beweis für den 4-Farben-Satz?

> Induktion über die Anzahl der Knoten n. Offensichtlich ist jeder Graph auf weniger als fünf Knoten 4-färbbar. Sei also $n > 4$ und nimm an, dass jeder planare Graph auf weniger als n Knoten 4-färbbar ist. Betrachte einen planaren Graphen G auf n Knoten. Da G planar ist, gibt es mindestens einen Knoten x mit weniger als fünf Nachbarn. Nach Induktionsannahme lässt sich $G - \{x\}$ mit vier Farben färben. Falls nicht alle Farben in der Nachbarschaft von x auftreten, so kann die Färbung auf G erweitert werden, indem x eine der fehlenden Farben erhält. Es kann also im Weiteren angenommen werden, dass in der Nachbarschaft von x alle Farben auftreten, d. h. x besitzt vier Nachbarn x_1, x_2, x_3, x_4, welche z. B. rot, grün, blau bzw. gelb gefärbt sind. Betrachte eine feste kreuzungsfreie Einbettung von G in die Ebene. O. B. d. A. bilde $\{x_2, x\}$ den kleinsten und $\{x_4, x\}$ den größten positiven Winkel mit $\{x_1, x\}$. Betrachte nun den Teilgraphen H_{13}, der von allen roten und blauen Knoten induziert wird. Liegen x_1 und x_3 in unterschiedlichen Komponenten von H_{13}, so können in einer der beiden Komponenten die Farben Rot und Blau vertauscht werden, ohne die Zulässigkeit der Färbung zu verletzen. Dann tritt aber eine der beiden Farben in der Nachbarschaft von x nicht mehr auf und die modifizierte Färbung kann wie oben beschrieben auf G erweitert werden. Seien also x_1 und x_3 in der gleichen Komponenten von H_{13}, d. h. es existiert ein Pfad p_{13} zwischen x_1 und x_3, der nur rote und blaue Knoten beinhaltet. Sei nun C_{13} der Kreis, welcher von $p_{13}, \{x_3, x\}, \{x, x_1\}$ gebildet wird. Aufgrund der Wahl von x_1 und x_3 liegt nun x_2 innerhalb von C_{13} und x_4 außerhalb, oder umgekehrt. Daher können x_2 und x_4 nicht durch einen grün-gelben Pfad miteinander verbunden sein. Das Umfärben einer Komponente von H_{24} erlaubt in diesem Fall eine Erweiterung der 4-Färbung auf G.

Aufgabe 5 [mündlich]

Zeigen Sie, dass es nur endlich viele planare Graphen gibt, deren Komplement planar ist.