INSTITUT FÜR INFORMATIK
KOMPLEXITÄT UND KRYPTOGRAFIE
PROF. DR. JOHANNES KÖBLER

SOMMERSEMESTER 2004
7. JULI 2004

Probeklausur Theoretische Informatik III

Aufgabe 1 [45 Punkte]

Auf den positiven natürlichen Zahlen seien die Relationen

$$R = \{(a,b) : a^2 \mid b\} \text{ und } S = \{(a,b) : a \mid b^2\}$$

gegeben.

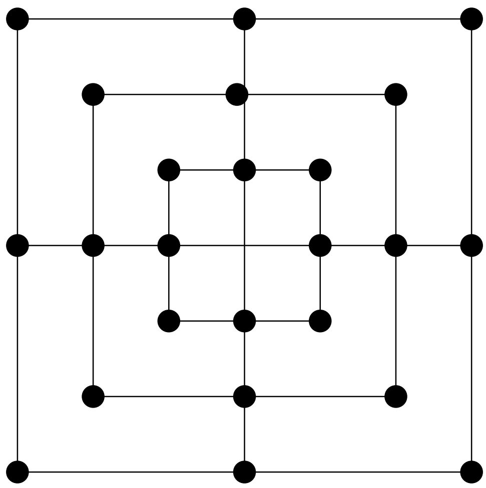
1. (10 Punkte) Bestimmen Sie unter Angabe einer Begründung, welche der Eigenschaften Reflexivität, Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie für R und S erfüllt sind. Sind R bzw. S Ordnungen?
2. (10 Punkte) Die Relationen R_0 und S_0 seien die Einschränkungen von R und S auf die Menge $A = \{1, \ldots, 9\}$. Zeichnen Sie den zu der Relation $R_0 \cap S_0^{-1}$ auf A gehörigen gerichteten Graphen.
3. (6 Punkte) Begründen Sie, dass R_0^* eine Ordnung auf A ist.
4. (7 Punkte) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für die Ordnung R_0^* auf A.
5. (12 Punkte) Bestimmen Sie größte, kleinste, minimale und maximale Elemente sowie Supremum und Infimum von $B := \{1, 4, 8\}$ und $C := \{2, 3\}$ in der Ordnung (A, R_0^*) (sofern vorhanden).

Aufgabe 2 [15 Punkte]

Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Zeigen Sie, dass $R \circ \bar{R} = \bar{R}$ gilt.

Aufgabe 3 [30 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden Graphen G.



1. (8 Punkte) Was ist die chromatische Zahl von G? Begründen Sie Ihre Behauptung.
2. (6 Punkte) Wieviele Kanten müssen aus G mindestens entfernt werden, damit der Graph 2-färbbar (d.h. bipartit) wird? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. (8 Punkte) Fügen Sie zwei Kanten zu G hinzu, so dass der entstehende Graph einen Eulerkreis enthält und geben Sie einen solchen als Knotenfolge an.
4. (8 Punkte) Besitzt der Graph einen Hamiltonkreis? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 [45 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit der Zerlegung der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, 8\}$ in die Mengen $U = \{1, \ldots, 4\}$ und $W = \{5, \ldots, 8\}$. Die Kanten seien

$$E = \{\{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}\}.$$

1. (4 Punkte) Geben Sie durch Hinzufügen einer Quelle und einer Senke zu dem Graphen wie in der Vorlesung ein Netzwerk N zum Auffinden eines optimalen Matchings an.
2. (4 Punkte) Betrachten Sie das Matching $M = \{\{1, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}\}$ und tragen Sie in das Netzwerk N den zugehörigen Fluss f ein.
3. (7 Punkte) Berechnen Sie das Restnetzwerk N_f.
4. (5 Punkte) Geben Sie einen Erweiterungspfad P für N_f an.
5. (4 Punkte) Erweitern Sie den Fluss f entlang P, wobei der Fluss f' entsteht. Zeichnen Sie N zusammen mit dem neuen Fluss f'.
6. (5 Punkte) Zeichnen Sie in den ursprünglichen Graphen das zu dem Fluss f' zugehörige perfekte Matching ein.