Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität II
Prof. Dr. Johannes Köbler

Algorithmisches Lernen
Wintersemester 2000/01
Köbler/Lindner

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x, d, n) = x^d \mod n$ in polynomieller Zeit berechenbar ist. Die Eingabegröße ist dabei $\log(x + d + n)$.

Aufgabe 2 (*schriftlich zu bearbeiten, 4 Punkte*)

Zeigen Sie, daß eine Konzeptklasse, die mit k Eq-Fragen exact erlernbar ist, mit $m = \frac{k}{\epsilon}(\ln\frac{1}{\delta} + k\ln 2)$ zufälligen Beispielen PAC erlernbar ist.
Hinweis. Für die i-te Eq-Frage können $q_i = \frac{1}{\epsilon}(\ln\frac{1}{\delta} + i\ln 2)$ Beispiele benutzt werden.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß Boolesche Formeln und Boolesche Schaltkreise mit logarithmischer Tiefe im wesentlichen die gleiche Berechnungskraft besitzen. Wir beschränken uns hierbei auf die vollständige Basis $\wedge, \vee, \neg$. Die Gatter der Schaltkreise haben also Fan-in ≤ 2. Beachten Sie, daß jede Formel unmittelbar durch einen Schaltkreis dargestellt werden kann, bei dem die (internen) Gatter Fan-out 1 haben. Da ein solcher Schaltkreis die Stuktur eines Binärbaums hat, bezeichnen wir diesen auch als *Formelbaum.*

Zeigen Sie:

a) Für jeden Schaltkreis der Tiefe t gibt es eine äquivalente Boolesche Formel der Länge höchstens 2^t. (Die *Tiefe* eines Schaltkreises ist die Länge des längsten Pfades von dem Wurzelgatter zu einer Variablen (Eingabegatter). Die *Länge* einer Formel F ist die Anzahl der logischen Operatoren $\wedge, \vee, \neg$, die in F vorkommen.)

b) Sei T ein binärer Baum mit k Blättern und sei m eine reelle Zahl mit $1 < m \leq k$. Dann gibt es einen Knoten x mit Kindern x_1 und x_2, so daß der Teilbaum von T mit Wurzel x mindestens m Blätter hat, die Teilbäume mit Wurzeln x_1 und x_2 aber jeweils weniger als m Blätter haben.

c) Sei $D(k)$ die maximale Tiefe eines Formelbaums mit k Blättern. Dann gilt

- $D(2) = 1$
- $D(k) \leq D(\lfloor 2k/3 \rfloor) + 2$

Hinweis. Spalten Sie von einem Formelbaum einen Teilbaum mit mindestens $k/3$ aber weniger als $2k/3$ Blättern ab, und kombinieren Sie diesen Teilbaum mit dem restlichen Baum mit Hilfe der Selektorfunktion

$$sel(x, y, z) = \begin{cases} y & \text{falls } x = 1 \\ z & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

d) $D(k) = O(\log k)$, und somit gibt es für jede Boolesche Formel der Länge l einen äquivalenten Schaltkreis der Tiefe $O(\log l)$, dessen Größe polynomiell in l beschränkt ist.