Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität II
Prof. Dr. Johannes Köbler

Algorithmisches Lernen
Wintersemester 2000/01
Köbler/Lindner

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Sei C die Konzeptklasse der monotonen Disjunktionen über n Variablen mit höchstens $k \leq \sqrt{n}$ Literalen. Zeigen Sie $VC = \Theta(k \log n)$.

Hinweis. Bilden Sie k disjunkte Blöcke von Bitpositionen der Länge $s = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ und konstruieren Sie eine Folge von Mengen $S_i \subseteq \{0,1\}^n$, $i = 1, \ldots, k$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $S_i \cap S_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$
- $|S_i| = \lfloor \log s \rfloor$
- Für alle $V \subseteq S_i$ gibt es eine Bitposition l im i-ten Block, so daß das l-te Bit aller Wörter $x \in V$ gleich 1, und das l-te Bit aller Wörter $x \in S_i - V$ gleich 0 ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß die Vereinigung $k\text{-}CNF_n \cup k\text{-}DNF_n$ für alle $n > k \geq 1$ echt in $k\text{-}DL_n$ enthalten ist.

Hinweis. Ein *Implikant* eines Konzepts $c \subseteq \{0,1\}^n$ ist eine Konjunktion (Term) T von Literalen, die c logisch impliziert (d.h. $a \in c$ für alle Belegungen $a \in \{0,1\}^n$ die T erfüllen). Ein *Primimplikant* ist ein minimaler Implikant T, d.h. das Streichen eines beliebigen Literals in T führt dazu, daß die resultierende Konjunktion kein Implikant mehr ist. Beachten Sie, daß eine boolesche Funktion mit einem Primimplikanten der Größe t (= Anzahl der Literale) nicht durch eine k-DNF Formel mit $k < t$ dargestellt werden kann und zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

a) Das durch die 1-Entscheidungsliste

$$(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (\mathit{true}, 0)$$

beschriebene Konzept und dessen Komplement hat einen Primimplikanten der Größe 2.

b) Sei $k < n$ und $c \subseteq \{0,1\}^n$ ein Konzept, das durch die "erweiterte" Entscheidungsliste

$$(\bar{x}_1 \wedge x_{k+1}, 1), (x_1 \wedge x_{k+1}, 0), (x_1 \oplus \cdots \oplus x_k, 1), (\mathit{true}, 0)$$

beschrieben werden kann, wobei $\oplus$ die "exklusive oder"-Funktion bezeichnet. Dann kann c durch eine k-Entscheidungsliste dargestellt werden, und sowohl c als auch das Komplement $\bar{c}$ haben einen Primimplikanten der Größe $k+1$.

Aufgabe 3

a) Es gibt ein Konzept $c \subseteq \{0,1\}^n$ das nicht linear separierbar ist und durch eine 2-Entscheidungsliste dargestellt werden kann.

b) $VC(k\text{-}DL_n) = \Theta(n^k)$. Benützen Sie hierzu $VC(1\text{-}DL_n) = \Theta(n)$ (Aufgabe 3 (c) vom Aufgabenblatt 3)