Übungen zur Komplexitätstheorie Wintersemester 01/02
Johannes Köbler/Olaf Beyersdorff

Übungsblatt 4

Aufgabe 10 (Speedup Theorem)

Zeigen Sie: Es gibt eine Sprache L, so dass es für jede $s(n)$-platzbeschränkte TM M mit $L = L(M)$ eine $s'(n)$-platzbeschränkte TM M' mit $L = L(M')$ gibt, wobei $s'(n) \leq \log s(n)$ für fast alle n.
Hinweis: Definieren Sie die Funktion T durch $T(1) = 2$ und $T(n+1) = 2^{T(n)}$, und konstruieren Sie (bezüglich einer geeigneten Aufzählung aller TMs $M_1, M_2, \ldots$, wobei wir den maximalen Platzbedarf von M_i bei Eingaben der Länge n mit $S_i(n)$ bezeichnen) eine Sprache $L \subseteq \{0\}^*$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:

a) Falls M_i die Sprache L entscheidet, so gilt $S_i(n) \geq T(n-i)$ für fast alle n.

b) Für alle $k \geq 1$ gibt es eine TM M_i, die L entscheidet, mit $S_i(n) \leq T(n-k)$.

Aufgabe 11 (Union Theorem)

Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Funktion S mit $\mathbf{DSPACE}(S(n)) = \mathbf{PSPACE}$.
Hinweis: Definieren Sie $S(n)$ bezüglich einer Aufzählung aller TMs $M_1, M_2, \ldots$, so dass die beiden folgenden Bedingungen gelten:

a) Für alle k gilt $S(n) \geq n^k$ für fast alle n.

b) Falls der Platzbedarf $S_i(n)$ von M_i für alle k die Bedingung $S_i(n) > n^k$ für unendlich viele n erfüllt, dann gilt auch $S_i(n) > S(n)$ für unendlich viele n.

Aufgabe 12 (schriftlich, Blum Komplexität, 10 Punkte)

Sei Φ eine Funktion, die (geeignete Kodierungen von) TMs M und Eingaben x in die natürlichen Zahlen abbildet. Dann heißt Φ ein **Komplexitätsmaß**, falls die beiden folgenden Axiome erfüllt sind:
Axiom 1: $\Phi(M, x)$ ist genau dann definiert, wenn $M(x)$ definiert ist.
Axiom 2: Es ist rekursiv entscheidbar, ob $\Phi(M, x) = m$ gilt.
Sind die folgenden Maße Komplexitätsmaße?

a) $time_M(x)$ und $\mathsf{space}_M(x)$ für TMs und NTMs.

b) $ink_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch ein anderes Symbol.

c) $carbon_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch das *gleiche* Symbol.