Mehrwertige Logiken

Christian Rothe

28. Mai 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Einführung

Im Folgenden will ich eine allgemeine Einführung in mehrwertige Logiken geben. Dabei befasse ich mich mit rein semantischen Aspekten, das Tableaux-Schema bleibt also aussen vor.

allgemeine Struktur: Zur Vereinfachung wird $A \Leftrightarrow B$ definiert als $(A \to B) \wedge (B \to A)$, dadurch ergibt sich die korrespondierende Wahrheitsfunktionen aus den elementaren Wahrheitsfunktionen.

Damit hat ein **allgemeines logisches Kalkül** die Struktur $[\mathfrak{V}, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}]$, wobei $\mathfrak{V}$ die Menge der Wahrheitswerte, $\mathfrak{D}$ die Menge der ausgezeichneten Wahrheitswerte, $\mathfrak{C}$ die Menge der Konnektoren, also z.B. $\mathfrak{C} = \{\wedge, \vee, \neg, \to\}$, und $\mathfrak{F} := \{f_c | c \in \mathfrak{C}\}$ die Menge der Wahrheitsfunktionen f_c zu den Konnektoren $c \in \mathfrak{C}$ bezeichnet.

Im **klassischen zweiwertigen Aussagenkalkül** ist $\mathfrak{V}$ die Menge $\{0, 1\}$ und $\mathfrak{D}$ die Menge $\{1\}$, sowie $\mathfrak{C}$ wie erwähnt und die zugehörigen f_c wie gehabt. Eine Belegung darauf ist eine Abbildung von den Aussagenvariablen in die Menge der Wahrheitswerte und erlaubt rekursiv unter Zuhilfenahme der Wahrheitsfunktionen die Bestimmung des Wahrheitswertes eines ganzes Ausdruckes des Kalküls. Der letzte relevante Begriff ist die **Folgerung**, die semantisch gültig ist, wenn es keine Belegung gibt, die die Voraussetzungen erfüllen (d.h. einen Wert in $\mathfrak{D}$ zuordnen), aber dem Schluss einen Wert ausserhalb von $\mathfrak{D}$ zuordnet.

Eine mehrwertige Logik ist nun die natürliche Erweiterung dieses Konzepts auf Mengen $\mathfrak{V}$, die mehr als 2 Elemente umfassen und Mengen $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{V}$, die ebenfalls mehr als ein Element haben können. Die Konnektoren können, müssen aber nicht dieselben wie im klassischen Aussagenkalkül sein. Hierbei unterscheidet man schließlich noch Logiken mit endlichen und solche mit unendlichen Wahrheitswertemengen. Im endlichen Fall - man spricht hierbei auch von n-wertigen Logiken - kann die Gültigkeit einer Folgerung durch Prüfung aller Kombinationen erfolgen, der Aufwand ist aber exponentiell, wie man leicht sieht.

Eine weitere Struktur, die man betrachtet ist die sogenannte **Boole'sche Algebra**, eine Struktur $\mathfrak{B} = [B, +, \cdot, *, 0, 1]$ mit zwei zweistelligen Operationen $+, \cdot$, einer einstelligen Operation $*$ und voneinander verschiedene Elemente $0, 1 \in B$, in der gilt:

$(B1)$	$a + b = b + a$	$(B1')$	$a \cdot b = b \cdot a$
$(B2)$	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$(B2')$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
$(B3)$	$(a + b) \cdot b = b$	$(B3')$	$(a \cdot b) + b = b$
$(B4)$	$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$	$(B4')$	$(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$
$(B5)$	$a + a* = 1$	$(B5')$	$a \cdot a* = 0$
$(B6)$	$a + 1 = 1$	$(B6')$	$a \cdot 0 = 0$

Man bezeichnet $\mathfrak{B}$ dann auch als **komplementären, distributiven Verband**.

Weiterhin von Interesse ist der Begriff der **funktionalen Vollständigkeit**. Ein Aussagenkalkül $[\mathfrak{V}, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}]$ heisst funktional vollständig, wenn sich jede endlichstellige Wahrheitsfunktion $\varphi : \mathfrak{V}^d \to \mathfrak{V}$ aus Funktionen aus $\mathfrak{F}$ zusammensetzen lässt. Mathematisch formuliert, kommt man zu folgenden Definitionen:

$$\mathfrak{W}^d := \left\{\varphi | \varphi : \mathfrak{V}^d \to \mathfrak{V}\right\}$$

$$\mathfrak{W} := \bigcup_{d=1}^{\infty} \mathfrak{W}^d$$

und damit

$$\mathfrak{F} \quad \text{funktional vollständig} \Leftrightarrow \langle\mathfrak{F}\rangle = \mathfrak{W}$$

wobei $\langle\mathfrak{F}\rangle$ definiert ist als kleinste Menge mit:

$$\mathfrak{F} \subseteq \langle\mathfrak{F}\rangle$$

$$f, g \in \langle\mathfrak{F}\rangle \to f^\circ g \in \langle\mathfrak{F}\rangle$$

Es handelt sich also um die ,,Verkettungshülle" von $\mathfrak{F}$.

2 Die 3-wertigen Logiken von Kleene und Łukasiewicz

Es folgen ein paar einfache Beispiele für 3-wertige Logiken:
$\mathfrak{V} = \{1, i, 0\}$ und $\mathfrak{D} = \{1\}$, wobei 1 und 0 wie bisher *wahr* und *falsch* bezeichnen, während i als *weder wahr noch falsch* zu verstehen ist. Es ergeben sich folgende Tabellen der grundlegenden Wahrheitsfunktionen:

$f_\neg$	
1	0
i	i
0	1

$f_\wedge$	1	i	0
1	1	i	0
i	i	i	0
0	0	0	0

$f_\vee$	1	i	0
1	1	1	1
i	1	i	i
0	1	i	0

$f_\to$	1	i	0
1	1	i	0
i	1	i	i
0	1	1	1

Man erkennt, dass die so erhaltenen Wahrheitsfunktionen Erweiterungen der klassischen Funktionen sind, da sie für Werte aus $\{0, 1\}$ exakt übereinstimmen. Die übrigen Einträge erhält man wie im folgenden Beispiel für $A \wedge B$: Ist A falsch, so (klassisch) auch $A \wedge B$, also insbesondere auch falls B weder wahr noch falsch ist. Ist A allerdings wahr und B weder wahr noch falsch, so liegen nicht genügend Informationen vor, um den Wahrheitswert von $A \wedge B$ zu bestimmen, $A \wedge B$ ist also weder wahr noch falsch. Die restlichen Einträge folgen aus Symmetriegründen.

Die so entstandene Logik nennt man (starke) Kleene'sche 3-wertige Logik oder auch schlicht K_3. Hiervon unterscheidet sich die schwache Kleene'sche Logik dadurch, dass der Wert jeder Wahrheitsfunktion i ist sobald ein Parameter diesen Wert annimmt.

Folgern im K_3 Anhand folgender Tabelle kann man erkennen, dass die Folgerung $p \to q \vDash_{K_3} \neg q \to \neg p$ gültig ist.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\to$	$\neg p$
1	1	**1**	0	**1**	0
1	i	**i**	i	**i**	0
1	0	**0**	1	**0**	0
i	1	**1**	0	**1**	i
i	i	**i**	i	**i**	i
i	0	**i**	1	**i**	i
0	1	**1**	0	**1**	1
0	i	**1**	i	**1**	1
0	0	**1**	1	**1**	1

Man erkennt, dass keine Belegung die Prämisse, aber nicht die Folgerung erfüllt.

Eine andere Möglichkeit Gültigkeit zu ermitteln ist, rückwärts zu arbeiten. Man betrachte z.B. die Formel $p \to (q \to p)$. Angenommen, eine Belegung weist der Formel keinen ausgezeichneten Wert zu, d.h. sie hat den Wert 0 oder i. Hat sie den Wert 0, so hat p den Wert 1 und $q \to p$ den Wert 0, aber hat p den Wert 1, so muss $q \to p$ auch den Wert 1 haben. Widerspruch. Also muss die Formel den Wert i haben, womit sich folgende drei Möglichkeiten ergeben:

p	$q \to p$	
1	i	unmöglich - $(q \to p)$ muss den Wert 1 haben
i	i	
i	0	unmöglich - $(q \to p)$ muss den Wert i oder 1 haben

Es bleibt lediglich der zweite Fall, welcher für p und q vom Wert i eintritt. Damit haben wir ein Gegenmodell konstruiert, d.h. $\nvDash_{K_3} p \to (q \to p)$.

Eine weitere Formel, die in K_3 **nicht** gilt, ist das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, d.h. $\nvDash_{K_3} p \vee \neg p$ mit dem Gegenmodel $\nu(p) = i$. Weitere Untersuchungen zeigen, dass es gar keine allgemeingültigen Formeln in K_3 gibt. Es zeigt sich nämlich, dass eine Formel, in der jeder Parameter mit i belegt wird, immer den Wert i annimmt, $\nu \equiv i$ ist also jeweils ein Gegenmodell.

Insbesondere gilt $p \to p$ nicht, was man aber durch Modifikation der Wahrheitsfunktion für $\to$ ändern kann:

$f_\to$	1	i	0
1	1	i	0
i	1	1	i
0	1	1	1

Diese Modifikation ist allerdings kein Verlust, da die alte Bedeutung von $A \to B$ durch $\neg A \vee B$ ausgedrückt werden kann. Die so erhaltene Logik ist die ursprünglich von Łukasiewicz angegebene und wird daher oft mit L_3 bezeichnet.

3 Die allgemeine mehrwertige Logik von Łukasiewicz

Nachdem Łukasiewicz 1920 mit seiner 3-wertigen Logik das erste von der klassischen Logik abweichende explizit mehrwertige System veröffentlichte, verallgemeinerte er das Prinzip in seiner Zusammenfassung 1930.

Nun betrachtet er völlig beliebige Wertemengen, schließt explizit die zweiwertige und unendlichwertige Logiken ein. Dabei liegen die Werte implizit zwischen 0 und 1, womit man die jeweiligen Wahrheitswerte z.B. als Spektrum zwischen wahr über ziemlich wahr, ein bisschen wahr, ein bisschen falsch und ziemlich falsch zu völlig falsch auffassen kann. Seine Basiskonnektoren sind $\neg$ und $\rightarrow_{\text{Ł}}$, so dass für Belegungen β und Ausdrücke G, H gilt:

$$Wert^{\text{Ł}}(\neg H, \beta) = 1 - Wert^{\text{Ł}}(H, \beta)$$

$$Wert^{\text{Ł}}(G \rightarrow_{\text{Ł}} H, \beta) = min(1, 1 - Wert^{\text{Ł}}(G, \beta) + Wert^{\text{Ł}}(H, \beta))$$

Leichte Überprüfung zeigt, dass dann für Ł_2 die klassische Aussagenlogik entsteht. Es zeigt sich allerdings auch, dass die korrespondierenden Wahrheitsfunktionen non_1 und vel_1 die Normalbedingung erfüllen, d.h. für Parameter in $\{0, 1\}$ liegen auch die Werte in $\{0, 1\}$, und somit erfüllen auch alle Superpositionen die Normalbedingung und alle Łukasiewicz-Systeme für $n > 2$ sind nicht funktional vollständig.

Alle weiteren ,,klassischen" Konnektoren ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} H_1 \vee H_2 &:= (H_1 \rightarrow_{\text{Ł}} H_2) \rightarrow_{\text{Ł}} H_2 \\ H_1 \wedge H_2 &:= \neg(\neg H_1 \vee \neg H_2) \\ H_1 \leftrightarrow_{\text{Ł}} H_2 &:= (H_1 \rightarrow_{\text{Ł}} H_2) \wedge (H_2 \rightarrow_{\text{Ł}} H_1) \end{aligned}$$

In diesem Setting gelten eine Reihe von Tautologien und anderen Eigenschaften, die man untersuchen kann, ggf. sollte man entsprechende Literatur konsultieren.

4 Bochvar Logik

Das nun folgende System wurde von Bochvar explizit mit dem Ziel geschaffen, der Paradoxa aus der klassischen Logik und der darauf aufgebauten Mengenlehre Herr zu werden. Das Grundkonzept basiert darauf, dass alle Aussagen in sinnvolle und unsinnige zu trennen sind und dass die Trennung in eine zweischichtige Formelsprache übersetzt wird. Hierbei ist eine Aussage sinnvoll, wenn sie entweder wahr oder falsch ist, ansonsten ist sie sinnlos oder paradox. Daraus resultieren zwei Sets von Konnektoren: die *inneren* und die *äusseren*. Die inneren Konnektoren sind Verallgemeinerungen der klassischen Konnektoren $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow$, während die externen eher metasprachlicher Natur sind:

$$\begin{array}{lll} externe\,Negation & \neg^* \alpha & \alpha\,ist\,falsch \\ externe\,Implikation & \alpha \rightarrow^* \beta & wenn\,\alpha\,wahr\,ist,\,so\,auch\,\beta \\ externe\,Disjunktion & \alpha \vee^* \beta & \alpha\,ist\,wahr\,oder\,\beta\,ist\,wahr \\ externe\,Konjunktion & \alpha \wedge^* \beta & \alpha\,ist\,wahr\,und\,\beta\,ist\,wahr \\ externe\,\ddot{A}quivalenz & \alpha \Leftrightarrow^* \beta & \alpha\,ist\,wahr\,gdw\,\beta\,wahr\,ist \end{array}$$

Die Wahrheitstabellen der inneren Konnektoren werden nach der selben Regel gebildet wie Kleene's schwache Logik: ,,jeder zusammengesetzte Ausdruck, der wenigstens eine sinnlose Komponente hat, ist sinnlos - sonst wird der Wahrheitswert klassisch bestimmt". Somit erhält man auch genau Kleene's schwache

Logik. Für die Definition der externen Konnektoren bedient man sich eines weiteren einstelligen Konnektors:

$$\textit{externe Bestätigung} \quad A_* \quad \alpha \, \textit{ist wahr}$$

mit der Wahrheitstabelle

α	A_*
1	0
i	0
0	1

Damit lassen sich die externen Konnektoren wie folgt charakterisieren:

$$\begin{aligned}
\neg^* \alpha &= \neg A_* \alpha \\
\alpha \vee^* \beta &= A_* \alpha \vee A_* \beta \\
\alpha \rightarrow^* \beta &= A_* \alpha \rightarrow A_* \beta \\
\alpha \wedge^* \beta &= A_* \alpha \wedge A_* \beta \\
\alpha \Leftrightarrow^* \beta &= A_* \alpha \Leftrightarrow A_* \beta
\end{aligned}$$

Somit hat man die Logik

$$\mathfrak{B}_3 = [\{0, i, 1\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow, \neg^*, \rightarrow^*, \vee^*, \wedge^*, \Leftrightarrow^*, \{1\}]$$

mit den Teillogiken

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{3i} &= [\{0, i, 1\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow, \{1\}] \\
\mathfrak{B}_{3e} &= [\{0, i, 1\}, \neg^*, \rightarrow^*, \vee^*, \wedge^*, \Leftrightarrow^*, \{1\}]
\end{aligned}$$

Die erste entspricht exakt der schwachen Kleene'schen Logik, während die zweite Logik keine Unterscheidung zwischen 0 und i trifft, somit exakt der klassischen Logik entspricht.

5 LP und RM_3

Eine weitere 3-wertige Logik, die man meist als LP bezeichnet, entspricht genau der K_3 mit dem Unterschied, dass $\mathfrak{D} = \{1, i\}$. In diesem Kontext betrachtet man i als *sowohl wahr als auch falsch* bzw. 1 und 0 als *wahr und nur wahr* und *falsch und nur falsch*. Die resultierenden Wahrheitsfunktionen entsprechen genau denen von K_3, da diese auch hier Sinn machen. Wenn zum Beispiel A den Wert 1 annimmt und B den Wert i, so sind sowohl A als auch B wahr, also $A \wedge B$ wahr - B ist aber auch falsch und somit $A \wedge B$ auch falsch - $A \wedge B$ nimmt also den Wert i an. Ähnliche Betrachtungen liefern die anderen Einträge.

Einen bedeutenden Unterschied findet man, wenn man $\vDash_{LP} p \vee \neg p$ betrachtet: Egal welchen Wert p annimmt, $p \vee \neg p$ nimmt in jedem Fall 1 oder i, also einen ausgezeichneten Wert, an. Wie gesehen gilt dies nicht in K_3.

Es gilt aber $p \wedge \neg p \nvDash_{LP} q$ mit dem Gegenmodell $\nu(p) = i, \nu(q) = 0$. Allerdings kann $p \wedge \neg p$ niemals den Wert 1 annehmen, also nie ausgezeichnet sein in K_3, womit die Folgerung dort gültig ist.

Ebensowenig gilt der Modus Ponens: $p, p \to q \not\models_{LP} q$ mit dem Gegenmodell $\nu(p) = i$, $\nu(q) = 0$. Dies kann man beheben, indem man die Wahrheitsfunktion für $\to$ wie folgt ändert:

$f_\to$	1	i	0
1	1	0	0
i	1	i	0
0	1	1	1

Wieder sei angemerkt, dass die alte Bedeutung von $A \to B$ noch durch $\neg A \vee B$ ausgedrückt werden kann. Die so erhaltene Logik nennt man RM_3.

6 Mehrwertige Logiken und Konditionale

Es zeigt sich, dass eine ganze Reihe von klassischen Konditionalen in den betrachteten Logiken problematisch sind. Folgende Tabelle fasst das einmal zusammen:

		K_3	L_3	LP	RM_3
(1)	$q \models p \to q$	✓	✓	✓	×
(2)	$\neg p \models p \to q$	✓	✓	✓	×
(3)	$(p \wedge q) \to r \models (p \to r) \vee (q \to r)$	✓	✓	✓	✓
(4)	$(p \to q) \wedge (r \to s) \models (p \to s) \vee (r \to q)$	✓	✓	✓	✓
(5)	$\neg(p \to q) \models p$	✓	✓	✓	✓
(6)	$p \to r \models (p \wedge q) \to r$	✓	✓	✓	✓
(7)	$p \to q, q \to r \models p \to r$	✓	✓	×	✓
(8)	$p \to q \models \neg q \to \neg p$	✓	✓	✓	✓
(9)	$\models p \to (q \vee \neg q)$	×	×	✓	×
(10)	$\models (p \wedge \neg p) \to q$	×	×	✓	×

Die Verifikation der noch nicht gezeigten Eigenschaften bleibt als - eher langwierige - Übung. Wie man sieht, schneiden die Konditionale eher mäßig ab.

Man kann allgemeine Gründe für diesen Verhalten finden, denn sollen sich Disjunktion und Äquivalenz in einer n-wertigen Logik natürlich verhalten so müssen folgende beiden Eigenschaften erfüllt sein:

1. Ist A (oder B) ausgezeichnet, so auch $A \vee B$.
2. Haben A und B den selben Wert, so muss $A \Leftrightarrow B$ ausgezeichnet sein.

Die Eigenschaften sind in den betrachteten Logiken (ausser K_3, wo die 2. fehlt) erfüllt.

Betrachtet man nun eine n-wertige Logik und n+1 Parameter $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Da es nur n Wahrheitswerte gibt, müssen in jeder Belegung zwei gleiche Parameter auftauchen, d.h. für ein i,j ist $p_i \Leftrightarrow p_j$ ist ausgezeichnet, daher muss eine Disjunktion aller solcher Bikonditionale ausgezeichnet also gültig sein.

Allerdings ist das kaum „sinnvoll", denn betrachtet man $n + 1$ Aussagen wie „Es gibt 1 Sterne am Himmel.", ..., „Es gibt $n + 1$ Sterne am Himmel.". Anschaulich ist jedes Bikonditional solcher Aussagen falsch und ebenso ihre Disjunktion, aber obige Betrachtung zeigt, dass die Disjunktion unter jeder Belegung ausgezeichnet sein muss.

7 (Philosophische) Motivation

Warum aber beschäftigt man sich mit Logiken, die mehr als die Werte *wahr* und *falsch* annehmen? Ist denn nicht jede Aussage mit einem der beiden Werte zu belegen? Anhand der folgenden Beispiele kann man sehen, dass das in der Tat nicht immer der Fall ist. Wir wenden uns nun also der philosophischen Motivation für die Betrachtung solcher mehrwertiger Logiken zu. Und zwar wieder besonders für die 3-wertigen. Betrachtet man hierbei i als *sowohl wahr als auch falsch* so spricht man vom Wahrheitswertüberschuss, soll i hingegen *weder wahr noch falsch* bezeichnen so spricht man vom Wahrheitswertmangel.

7.1 Wahrheitswertüberschuss

Im folgenden sollen 2 Gründe angegeben werden, warum es zu Wahrheitswertüberschuss kommen sollte.

7.1.1 Inkonsistente Gesetze

Eine Möglichkeit sind inkonsistente Gesetze, man nehme sich z.B. ein (natürlich rein fiktives) Land, in dem folgende zwei Gesetze bei ihrem Erlass absolut Sinn gemacht haben:

1. Kein Eingeborener soll das Recht haben zu wählen.
2. Jeder Landeigentümer hat das Recht zu wählen.

Gibt es nun wider Erwarten jemanden, auf den beide Gesetze anzuwenden sind - wir nennen ihn einmal John - so hat dieser sowohl das Recht als auch nicht das Recht zu wählen. Man wird solchermassen widersprüchliche Gesetze bei Bedarf entsprechend ändern, aber bis zu dieser Änderung besteht des Tatbestand des Widerspruchs. Ebenso gibt es normalerweise Prioritätsregeln die solche juristischen Widersprüche auflösen, so dominieren neuere Gesetze alte, Verfassungsrecht dominiert anderweitige Regeln und Gesetze.

Man kann sich jedoch ohne weiteres vorstellen, dass es entsprechende Fälle gibt, die man nicht derart auflösen kann.

7.1.2 Selbstreferenzierende Paradoxa

Ein zweites Argument für die Existenz von Wahrheitswertüberschuss sind die sogenannten selbstreferenzierenden Paradoxa.

Das Lügner Paradoxon Man betrachte den Satz: ,,Dieser Satz ist falsch." Ist der Satz richtig, so ist er falsch. Ist er aber falsch, so ist er richtig.

Die Russell'sche Antinomie Man betrachte die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten: $\mathfrak{M} = \{x | x \notin x\}$. Enthält $\mathfrak{M}$ sich nun selbst, so enthält sie sich nicht. Enthält $\mathfrak{M}$ sich nicht, so liegt $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$.

7.2 Wahrheitswertemangel

Wir wenden uns nun einigen Motivationen zu, warum man Wahrheitswertemangel sinnvoll betrachten sollte.

7.2.1 Logik der Unbestimmtheit

Kleene's Studien wurden von der Betrachtung der Grundlagen der Mathematik motiviert. Daher hat er eine Logik kreiert, die die Analyse partiell definierter Prädikate ermöglicht. Man betrachte zum Beispiel folgende Eigenschaft:

$$P(x) \quad gdw \quad 1 \leq 1/x \leq 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Die Wahrheitsfunktion $P(x)$ ist für einige x wahr, für andere falsch oder undefiniert:

$$P(a) = \begin{cases} wahr & f. \quad 1/2 \leq a \leq 1 \\ undefiniert & f. \quad a = 0 \\ falsch & sonst \end{cases}$$

Eine andere Interpretation für i ist hier also *undefiniert*.
Ebenso gelangt man zu dieser Logik, wenn man die Algebra der unscharfen Klassen mathematisch beschreibt. Eine unscharfe Klasse eines nicht-leeren Bereichs A identifiziert man mit der dreiwertigen charakteristischen Funktion $X_P : A \to \{-1, 0, +1\}$ die zu der Partition korrespondiert, welche durch die partielle Definition $D(P)$ einer Eigenschaft P (der Elemente von A) gegeben ist:

$$X_P(a) = \begin{cases} -1 & \text{falls } P(a) \text{ nach } D(P) \text{ falsch ist} \\ 0 & \text{falls } P(a)\ D(P)\text{-unentscheidbar ist} \\ +1 & \text{falls } P(a) \text{ nach } D(P) \text{ wahr ist} \end{cases}$$

Hierauf sind die folgenden Operationen definiert:

$$\begin{aligned} (X \cup Y)(a) &= max\{X(a), Y(a)\} \\ (X \cap Y)(a) &= min\{X(a), Y(a)\} \\ (-X)(a) &= -X(a) \end{aligned}$$

und damit erhält man einen distributiven Verband.

7.3 Unbeweisbarkeit

Eine Aussage A kann als weder wahr noch falsch gewertet werden, wenn sich weder A noch $\neg A$ beweisen lassen. Darauf wollen wir nicht allzu tief eingehen.
In diese Kategorie gehören auch Aussagen, die zukünftige Ereignisse betreffen, also Sätze wie ,,Der erste Papst im 22. Jahrhundert wird ein Chinese sein." und ähnliche, deren Wahrheitswert noch nicht bestimmt ist. Natürlich gibt es sehr wohl Sätze über die Zukunft, die wahr sind.

7.4 Bezeichnungsfehler

Eine letzte Klasse von Aussagen und Sätzen, denen man keinen Wahrheitswert zuordnen kann sind solche, die Bezeichnungen enthalten, die sich auf nichts (Existierendes) beziehen also Namen wie *Sherlock Holmes* oder Beschreibungen wie *die größte ganze Zahl*. Ein Ansatz mit solchen Aussagen umzugehen ist sie von vornherein für weder wahr noch falsch zu betrachten.
Dies ist allerdings eine ziemlich starke Aussage, denn man kann Sätze wie ,,Sherlock Holmes existiert nicht wirklich." oder ,,Entweder 2 ist gerade oder die größte Primzahl ist 5." durchaus als wahr bezeichnen.

Literatur

[1] G. Priest, An Introduction to Non-Classical Logic, Cambridge University Press, 2001

[2] G. Malinowski, Many-Valued Logics, Oxford, 1993

[3] S. Gottwald, Mehrwertige Logik, Akademie Verlag, Berlin, 1989