Proseminar: Nichtklassische Logik

Vortrag
Intuitionistische Logik

Dieter König
170606

13. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation **2**

2 Der Intuitionismus **3**

3 Mögliche-Welten-Semantik für Intuitionismus **3**

4 Die Tableaux-Methode für Intuitionistische Logik **5**

5 Die Grundlagen des Intuitionismus **7**

6 Die Intuitionistischen Bedingungen **8**

7 Beweise der Sätze **8**

8 Geschichte **9**

9 Literaturliste **10**

1 Motivation

Aus einer mengentheoretischen Sichtweise kann man die Intuitionistische Logik als eine Teilmenge der Klassischen Logik ansehen. Sie kann nämlich aus dem klassischen Kalkül definiert werden, indem man das 'Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten' als ungültig erklärt, was der Kritik von Brouwer(1907, 1908) an diesem Gesetz entgegenkommt. Aber die philosophische und mathematische Rechtfertigung der beiden Logiken sind grundlegend verschieden.

Das 'Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten' erlaubt Beweise solcher Disjunktionen $\varphi \vee \psi$, in denen weder φ noch ψ beweisbar sind. Es ist äquivalent zu der Formel $\neg\neg p \rightarrow p$ in der klassischen Logik, die Beweise durch *reductio ad absurdum* rechtfertigt, was uns die Möglichkeit gibt, die Existenz von Objekten zu beweisen, ohne den Weg ihrer Konstruktion zu zeigen. Das Ziel der Intuitionistischen Logik ist es, die Gesetze des 'konstruktiven' Herleitens auszusondern und zu beschreiben.

Das Hauptprinzip des Intuitionismus behauptet, dass die Wahrheit einer mathematischen Aussage nur durch die Erzeugung eines konstruktiven Beweises der Aussage nachgewiesen werden kann. So ist die beabsichtigte Bedeutung der intuitionistischen logischen Konnektoren durch die Terme *Beweise* und *Konstruktionen* definiert. Die Begriffe „Beweis“ und „Konstruktion“ werden für primär gehalten und es wird angenommen, dass wir verstehen, was ein Beweis einer atomaren Behauptung ist.

- Ein Beweis für $\varphi \wedge \psi$ besteht aus einem Beweis für φ und einem Beweis für ψ
- Ein Beweis für $\varphi \vee \psi$ besteht aus einem Beweis für φ oder einem Beweis für ψ
- Ein Beweis für $\varphi \sqsupset \psi$ ist eine Konstruktion, die für einen gegebenen Beweis von φ einen Beweis für ψ liefert.
- $\perp$ hat keinen Beweis
- Ein Beweis von $\rightharpoonup \varphi$ ist eine Konstruktion, die für einen gegebenen Beweis von φ einen Beweis von $\perp$ liefern würde bzw. es ist ein Beweis, dass es keinen Beweis für φ gibt.

2 Der Intuitionismus

Lasst uns mit einem Blick auf ursprüngliche Rationale für Intuitionismus beginnen. Betrachten wir mal den Satz: „Oma führte ein ruhiges Leben, bis sie sich entschied, Drogen auf einer kleinen Insel südlich des Equators zu pushen." Ihr könnt es verstehen und unendlich viele andere Sätze auch, obwohl ihr diesen nie gehört habt.

Wir können Sätze solcher Art verstehen, weil wir deren einzelne Teile und die Art und Weise, wie sie zusammengefügt wurden, verstehen. Die Bedeutung eines Satzes ist durch die Bedeutung der einzelnen Teile und der grammatischen Konstruktion vorgegeben. Diese Tatsache nennt man *Zusammensetzbarkeit*.

Eine orthodoxe Sicht ist, dass die Bedeutung einer Aussage durch die Bedingungen, unter denen sie wahr ist, gegeben ist. Die nennt man *Wahrheitsbedingungen*. Wegen der Zusammensetzbarkeit müssen die Wahrheitsbedingungen einer Aussage in Termen, bestehend aus den Wahrheitsbedingungen der Teile, angegeben werden. Zum Beispiel $\neg A$ ist wahr gdw. A nicht wahr ist usw.

Allgemein ist Wahrheit eine Beziehung zwischen der Sprache und aussersprachlicher Realität. „Melbourne ist in Australien." ist wahr, wegen bestimmter objektiver sozialer und geographischer Anordnungen, die in der Südhalbkugel unseres Planeten gelten. Aber viele haben die Notation der aussersprachlichen Realitat als problematisch empfunden, besonders für die Mathematik.

Was ist die aussersprachliche Realität, die zur Wahrheit von '2+3=5' gehört? Einige haben die Existenz von objektiven mathematischen Objekten wie 3 und 5 vorgeschlagen. Für die anderen war das eine mystische Herangehensweise. Unter diesen waren auch die mathematischen Intuitionisten, die das allgemeine Konzept der Wahrheit, welches auf die Mathematik angewandt wird, aus genau diesem Grund ablehnten.

Aber wie soll man dann die Bedeutung nun ausdrücken? Die intuitionistische Antwort darauf ist, dass die Bedeutung des Satzes, nicht durch die Bedingungen unter denen er wahr ist, wo die Wahrheit als eine Relation zu außerlichen Realität angenommen wird ,sondern durch die Bedingungen unter denen er bewiesen ist, gegeben wird. Diese nennt man die *Beweisbedingungen*, dabei ist der Beweis eine (mentale) Konstruktion einer bestimmten Art.

Angenommen, dass wir wissen, was als Beweis der atomarsten Sätze zählt(aussagenlogische Parameter), sind die Beweisbedingungen für Sätze, die mit Hilfe der üblichen aussagenlogischen Konnektoren konstruiert wurden, die folgenden Beweisbedingungen:

- Ein Beweis für $A \wedge B$ ist ein Paar aus einem Beweis für A und einem Beweis für B
- Ein Beweis für $A \vee B$ ist ein Beweis für A oder ein Beweis für B
- Ein Beweis für $\rightharpoonup A$ ist ein Beweis, dass es keinen Beweis für A gibt.
- Ein Beweis für $A \sqsupset B$ ist eine Konstruktion, die mit einem gegebenen Beweis für A angewandt werden kann, um einen Beweis für B zu erhalten.

Beispiel für keinen Beweis für $A \vee \rightharpoonup A$: ZwillingsPrimzahlen-Vermutung

3 Mögliche-Welten-Semantik für Intuitionismus

Um ein besseres Verständnis der Intuitionistischen Logik zu erhalten, lassen sie uns auf eine mögliche Weltensemantik schauen, die die vorgestellten Ideen umsetzt.

Die Sprache der Intuitionistischen Aussagenlogik ist die Sprache, die nur die Konnektoren $\wedge, \vee, \rightharpoonup$ und $\sqsupset$ hat.

Eine Intuitionistische Interpretation für die Sprache ist eine Struktur $[W, R, v]$, die die gleiche Interpretation wie für die normale modale Logik $K_{\rho\tau}$ ist, d.h. R ist reflexiv und transitiv, abgesehen von einer Ausnahme, nämlich der *Vererbungsbedingung*, für jede Variable p gilt:

für alle $w \in W$ gilt, wenn $v_w(p) = 1$ und wRw' dann $v_{w'}(p) = 1$

Die Zuweisung von Werten zu molekularen Formeln ist folgendermaßen durch die *Rekursivitätsbedingungen* gegeben:

$v_w(A \wedge B) = 1$ gdw. $v_w(A) = 1$ und $v_w(B) = 1$

$v_w(A \vee B) = 1$ gdw. $v_w(A) = 1$ oder $v_w(B) = 1$

$v_w(\rightharpoonup A) = 1$ gdw. für alle w' mit wRw' gilt $v_{w'}(A) = 0$

$v_w(A \sqsupset B) = 1$ gdw. für alle w' mit wRw' gilt $v_{w'}(A) = 0$ oder $v_{w'}(B) = 1$

Bemerken wir, dass $\rightharpoonup A$ in Wirklichkeit $\Box\neg A$ und $A \sqsupset B$ in Wirklichkeit $\Box(A \rightarrow B)$ ist.

Wenn diese Wahrheitsbedingungen gegeben sind, gilt die Vererbungsbedingung als eine Tatsache, nicht nur für aussagenlogische Parameter, sondern für alle Formeln. Den Beweis führen wir durch Induktion an der Konstruktion der Formeln. Angenommen das Resultat gilt für A und B. Wir zeigen, dass es für $\rightharpoonup A, A \wedge B, A \vee B, A \sqsupset B$ gilt. Für $\rightharpoonup A$: Wir prüfen die Gegenbehauptung. Angenommen wRw' und $\rightharpoonup A$ is falsch in w'. Dann existiert ein w'', so dass $w'Rw''$ und A ist wahr in w''. Aber dann haben wir wRw'' durch die Transitivität. Daher ist $\rightharpoonup A$ falsch in $w \Longrightarrow$ Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Für $A \wedge B$: Angenommen $A \wedge B$ ist wahr in w und wRw'. Dann sind A und B wahr in w. Nach Induktionsvoraussetzung sind A und B wahr in $w' \Longrightarrow A \wedge B$ ist wahr in w'. Für $A \vee B$: Das Argument ist das gleiche. Für $A \sqsupset B$: Wir prüfen wieder die Gegenbehauptung. Angenommen wRw' und $A \sqsupset B$ ist falsch in w'. Dann existiert w'' mit $w'Rw''$, A ist wahr und B ist falsch in w''. Aber wRw'' durch Transitivität und damit $A \sqsupset B$ ist falsch in $w \Longrightarrow$ Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Bevor wir die Definition der Gültigkeit vollenden, lasst uns sehen, wie eine Intuitionistische Interpretation die Intuitionistischen Ideen des vorigen Abschnittes umsetzt. Stellen wir uns eine Welt als einen Informationszustand zu einer bestimmten Zeit vor, d.h. intuitiv, die Sachen, die dort gelten, sind Sachen, die zu dieser Zeit bewiesen sind. uRv soll bedeuten, dass v eine mögliche Erweiterung von u ist, die erhalten wurde, indem eine Anzahl(möglich Null) weiterer Beweise gefunden wurde. Wenn wir dieses Verständnis voraussetzen, dann ist klar, dass R reflexiv und transitiv ist.(Für τ: irgendeine Erweiterung einer Erweiterung ist eine Erweiterung) Und die Vererbungsbedingung ist intuitiv auch korrekt. Falls etwas bewiesen ist, bleibt es bewiesen, was immer auch wir sonst prüfen.

Zu gegebenen Beweisbedingungen sind die Rekursivitätsbedingungen auch sehr natürlich. $A \wedge B$ ist bewiesen zu einer Zeit gdw. A ist bewiesen zu der Zeit genauso wie B. $A \vee B$ ist bewiesen zu einer Zeit gdw. A zu der Zeit bewiesen ist oder B. Falls $\rightharpoonup A$ zu irgendeiner Zeit bewiesen ist, dann haben wir einen Beweis, dass es keinen Beweis für A gibt. Daher kann A zu keiner später möglichen Zeit bewiesen werden. Dagegen falls $\rightharpoonup A$ zu irgendeiner Zeit nicht bewiesen ist, dann ist es zunächst möglich, dass ein Beweis für A auftaucht, und so A zu irgendeiner, in der Zukunft möglichen, Zeit gelten wird. Letzendlich, falls $A \sqsupset B$ zu einer Zeit bewiesen ist, dann haben wir eine Konstruktion, die auf irgendeinen Beweis von A angewandt werden kann, um einen Beweis für B zu geben. Daher gilt zu irgendeiner, in der Zukunft möglichen, Zeit entweder es gibt keinen Beweis für A oder falls es einen gibt, gibt es uns einen Beweis für B. Umgekehrt, wenn $A \sqsupset B$ zu einer Zeit nicht bewiesen ist, dann ist es zunächst möglich, dass in einer zukünftigen Zeit A bewiesen sein wird und B nicht. Daher wird A zu irgendeiner zukünftigen Zeit gelten und B versagen.

Zurück zur Gültigkeit: es ist als eine Wahrheitserhaltung über alle Welten von allen Interpretationen auf die übliche Art und Weise definiert. Wir werden das intuitionistische logische Folgern als $\models_I$ schreiben, wenn nötig.

Beobachten wir, dass falls eine Intuitionistische Interpretation nur eine Welt hat, die Rekursivitätsbedingungen für die Konnektoren sich zu den klassischen Bedingungen reduzieren. Eine Eine-Welt Intuitionistische Interpretation ist daher in Wirklichkeit eine klassische Interpretation. Deswegen gilt: Wenn die Wahrheit in allen Welten aller Intuitionistischer Interpretationen erhalten bleibt, dann bleibt sie auch für alle klassischen Interpretationen erhalten. Ist eine Folgerung intuitionistisch gültig, dann ist sie auch klassisch gültig. Die Umkehrung gilt nicht wie wir sehen werden. Also ist die Intuitionistische Logik eine Unterlogik der klassischen Logik. Es ist wertvoll zu bemerken, dass es einen Weg gibt, die klassische Logik als einen Teil der Intuitionistischen Logik zu sehen. Dafür kann gezeigt werden, dass wenn $\Sigma \vdash A$ in der klassischen

Logik, dann $\neg\neg\,\Sigma \vdash \neg\neg\,A$ in der Intuitionistischen Logik, wobei $\neg\neg\,\Sigma = \{\neg\neg\,A;\ A \in \Sigma\}$

4 Die Tableaux-Methode für Intuitionistische Logik

Um ein Tableaux für intuitionistische Logik zu erhalten, modifizieren wir das der normalen modalen Logik. Die erste Modifikation ist die, dass ein Knoten im Tableaux jetzt die Form $A, +i$ oder $A, -i$ hat. Erstes bedeutet intuitiv, dass A wahr in der Welt i ist, Zweites bedeutet, dass A falsch in der Welt i ist. Bei der modalen Logik wurde diese Aussage mit $\neg\ A, i$ ausgedrückt. Jetzt kann das A in einer Welt falsch sein, ohne das $\neg\ A$ dort wahr ist.

Die Initial-Liste für das Tableaux zur einer gegebenen Folgerung besteht jetzt aus $A, +0$ für jede Voraussetzung und aus $B, -0$ für jeden Schluss B.

Einen Abschluss eines Pfades haben wir, wenn dort Knoten der Form $A, +i$ und $A, -i$ auftauchen.

Die Regeln des Tableaux für die Konnektoren sind die folgenden:

$$\begin{array}{c} A \wedge B, +i \\ \downarrow \\ A, +i \\ B, +i \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \wedge B, -i \\ \swarrow \quad \searrow \\ A, -i \qquad B, -i \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \vee B, +i \\ \swarrow \quad \searrow \\ A, +i \qquad B, +i \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \vee B, -i \\ \downarrow \\ A, -i \\ B, -i \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \sqsupset B, +i \\ irj \\ \swarrow \quad \searrow \\ A, -j \qquad B, +j \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \sqsupset B, -i \\ \downarrow \\ irj \\ A, +j \\ B, -j \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\ A, +i \\ irj \\ \downarrow \\ A, -j \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\ A, -i \\ \downarrow \\ irj \\ A, +j \end{array} \qquad \begin{array}{c} p, +i \\ irj \\ \downarrow \\ p, +j \end{array}$$

Die Regeln für $\wedge$ und $\vee$ sind selbsterklärend. Die erste Regel für jedes $\sqsupset$ und $\neg$ muss auf jedes j auf dem Pfad angewandt werden. In der zweiten Regel ist das j neu. Die Regeln sind leichter zu merken, wenn man sich daran erinnert, dass $A \sqsupset B$ in Wirklichkeit $\Box(A \to B)$ und $\neg\ A$ bedeutet in Wirklichkeit $\Box\neg A$. Insbesondere können wir nie eine Regel der Form $A \sqsupset B, +i$ oder $\neg\ A, +i$ abhacken, da wir die Regel immer anwenden müssen, falls etwas von der Form irj auftaucht. Die letzte Regel wird nur auf aussagenlogische Parameter angewandt, und hier wieder auf jedes j verschieden zu i. Die Regel wird durch die Vererbungsbedingung benötigt, und wir nennen sie deshalb die „Vererbungsregel“. Beachten wir, dass es keine entsprechende Regel für $p, -i$ gibt.

Wir haben ausserdem die Regeln ρ und τ, da sie für die Reflexivität und die Transitivität von R benötigt werden.

Beispiel: Hier ist ein Tableaux für $\vdash_I p \sqsupset \neg\neg\ p$

$$\begin{array}{c} p \sqsupset \neg\neg\ p, -0 \\ 0r0 \\ 0r1 \\ p, +1 \\ \neg\neg\ p, -1 \\ 1r1 \\ 1r2 \\ \neg\ p, +2 \\ 2r2, 0r2 \\ p, -2 \\ p, +2 \\ \times \end{array}$$

Hier ist ein anderes Beispiel, um zu zeigen, dass $p \sqsupset q \nvdash_I \neg\ p \vee q$.

$$
\begin{array}{c}
p \sqsupset q, +0 \\
\multimap p \vee q, -0 \\
0r0 \\
\multimap p, -0 \\
q, -0 \\
0r1 \\
p, +1 \\
1r1 \\
\swarrow \quad \searrow \\
p, -0 \qquad q, +0 \\
\swarrow \quad \downarrow \qquad \times \\
p, -1 \qquad q, +1 \\
\times
\end{array}
$$

Die sechste und die siebente Zeile sind durch die Anwendung der Regel für falsches $\multimap$ auf die vierte Zeile entstanden. Beide Aufsplittungen sind durch die Anwendung der Regel für wahres $\sqsupset$ auf die erste Zeile bzgl. der Welten 0 und 1 entstanden. Bemerken wir, dass es keine mögliche Anwendung der Vererbungsregel gibt.

Gegenmodelle werden von einem offenen Pfad des Tableaux auf natürliche Art und Weise abgelesen. Die Welten und die Zugriffsrelationen sind so, wie es der Pfad des Tableaux spezifiziert. Falls ein Knoten der Form $p, +i$ auf dem Pfad auftaucht, wird p in der Welt w_i auf wahr gesetzt, andernfalls auf falsch. (Im Detail: Falls der Knoten der Form $p, -i$ auf dem Pfad auftaucht, wird p in der Welt w_i auf falsch gesetzt.) Daher, wenn wir vom offenen Pfad des vorhergehenden Beispiels ablesen: $W = w_0, w_1$; $w_0 R w_0$, $w_0 R w_1$ und $w_1 R w_1$; $v_{w_0}(p) = v_{w_0}(q) = 0$ und $v_{w_1}(p) = v_{w_1}(q) = 1$.

In Bildern:

$$
\begin{array}{ccc}
\curvearrowright & & \curvearrowright \\
w_0 & \rightarrow & w_1 \\
-p & & +p \\
-q & & +q
\end{array}
$$

Wir deuten die Tatsache, dass p wahr (in der Welt) ist, durch $+p$, und die Tatsache, dass p falsch ist durch $-p$. Das ist ein einfaches Verfahren zur direkten Überprüfung, ob eine Interpretation ein Gegenmodell ist oder nicht. In jeder Welt, die von w_0 aus erreichbar ist, ist p falsch oder q wahr. Daher ist $p \sqsupset q$ wahr in w_0. p ist wahr in w_1, daher $\multimap p$ ist falsch in w_0. Aber q ist auch falsch dort. Deswegen ist $\multimap p \vee q$ falsch dort.

Die Tableaux sind korrekt und vollständig unter Berücksichtigung der Semantik.

Bemerken wir, dass wie für $K_{\rho\tau}$ ein offenes Tableau für die intuitionistische Logik unendlich sein kann. Hier, zum Beispiel, ist der Anfang eines Tableaux, welches $\nvdash_I \multimap\multimap p \sqsupset p$ beweist:

$$
\begin{array}{c}
\multimap\multimap p \sqsupset p, -0 \\
0r0 \\
0r1 \\
\multimap\multimap p, +1 \\
p, -1 \\
1r1 \\
\multimap p, -1 \\
1r2 \\
p, +2 \\
2r2, 0r2 \\
\multimap p, -2 \\
2r3 \\
\vdots
\end{array}
$$

Jedes Mal, wenn wir eine neue Welt i öffnen, zwingt uns die vierte Zeile (und die Transitivität) dort $\rightharpoonup p, -i$ zu schreiben, dies zwingt uns wiederum eine neue Welt j mit irj und $p, +j$ zu öffnen usw.

Wieder, wie mit $K_{\rho\tau}$ ist es in solchen Fällen einfacher Gegenmodelle zu konstruiren. Für $\rightharpoonup\rightharpoonup p \sqsupset p$ wird folgendes funktionieren.

$$\begin{array}{ccc} \curvearrowright & & \curvearrowright \\ w_0 & \rightarrow & w_1 \\ -p & & +p \end{array}$$

Da p wahr in w_1 ist, ist $\rightharpoonup p$ falsch in w_0 und w_1. Daher ist $\rightharpoonup\rightharpoonup p$ wahr in w_0. Da aber p dort falsch ist, ist $\rightharpoonup\rightharpoonup p \sqsupset p$ falsch in w_0.

5 Die Grundlagen des Intuitionismus

So viel zu den formalen Details: in diesem Abschnitt schauen wir uns die Grundlagen etwas genauer an.

Die intuitionistische Kritik der klassischen Logik ist als eine Tatsache nicht sehr überzeugend. Falls jemand das Reich der unabhängig existierenden mathematischen Objekte ablehnt, könnte man einfach sagen, dass die Wahrheit für atomare Sätze als Beweisbarkeit festgestellt werden muss. Ist die Wahrheit für atomare Sätze einmal auf diese Art und Weise definiert, dann sind die Wahrheitsbedingungen für die Konnektoren wie in der klassischen Logik gegeben. Daher wenn wir uns mit Arithmetik beschäftigen, ist etwas wie '2+3=5' wahr, wenn der numerische Algorithmus für die Addition es beweist. Dann ist aber für jeden Satz A, $\rightharpoonup A$ wahr gdw. A nicht wahr ist usw. Deswegen ist die klassische Logik nicht wertlos.

Ein viel feineres, aber radikales Argument für Intuitionismus wurde vor einigen Jahren von einigen Leuten entdeckt, vorallem aber durch Dummett, der ziemlich unterschiedliche Überlegungen anstellte. Im Detail geht es folgendermaßen. Jemand, der die Bedeutung eines Satzes versteht, muss in der Lage sein zu zeigen, dass er die Bedeutung begriffen hat, denn sonst würden wir weder fähig sein zu erkennen, dass er es verstanden hat, noch könnten wir die Bedeutung des Satzes von den anderen lernen. Insbesondere demonstrieren wir unser Verständnis der Bedeutung des Satzes durch Bereitsein es unter den Bedingungen, unter denen es gilt, zu behaupten(und nur unter diesen). Aber klassisch wurden die Wahrheitsbedingungen angewandt, und daher wäre das unmöglich. Solche Bedingungen erlauben die Möglichkleit, dass ein Satz wahr sein könnte, obwohl wir es niemals erkennen würden. Zum Beispiel könnte der Satz: „Es ist nicht der Fall, dass irgenwo in Raum und Zeit ausserhalb des Sonnensystems intelligente Wesen existieren" wahr sein, obwohl wir es nie überprüfen könnten. Deswegen müssen die Bedeutungen in solchen Ausdrücken spezifiziert werden, die wir als ein Nachweis erkennen, nämlich die Bedingungen unter denen der Satz als wahr gezeigt wurde, das nennen wir *überprüft*.

Klar, Dummett's Argument lässt sich auf alle Sprachen anwenden, nicht nur auf die mathematische Sprache. Intuitionistische Forderung an die Mathematik ist nur der Spezialfall, dass der Beweis eine mathematische Überprüfung ist. Falls diese Kritik gerechtfertigt ist, könnte die intuitionistische Logik auch allgemeiner korrekt sein.

Man kann aber auch Zweifel an Dummett's Argument aus verschiedenen Gründen äußern. Als erstes, warum muss es immer notwendig sein, dass man in der Lage ist, den Begriff der Bedeutung zu manifestieren? Einige Aspekte der Bedeutung könnten angeboren oder hart verankert in uns sein. Weder brauchen wir sie zu lernen, noch brauchen wir eine *posteriori* Garantie, dass der Sprecher sie beherrscht.(Chomsky hat argumentiert, die Grammatik ist genau auf diese Art und Weise angeboren.)

Aber sogar wenn wir die Manifestation des Begreifens der Bedeutung garantieren, warum muss es so streng manifestierbar sein, wie die Argumente es verlangen? Wieso ist es nicht ausreichend, dem Satz einfach zuzustimmen, wenn der Stand der Dinge, die es beschreibt, manifestiert ist, und nicht es selbst?

Es kann vorgeschlagen werden, dass die Manifestation nicht angemessen sein könnte. Es kann Fälle geben, indenen Leute dem gleichen Satz zustimmen, aber nicht das selbe meinen, was durch eine Situation demonstriert werden kann, die als eine Tatsache niemals zu Licht kommen wird, aber wo sie sich unterscheiden würden. Zum Beispiel, Sie und ich könnten einverstanden sein, dass die Standardobjekte rot sind, dabei jedoch verschiedene Dinge meinen, was dadurch blossgestellt werden kann, dass die Rotheit von irgendwelchen total neuen Objekten niemals als eine Tatsache ans Licht kommen wird.

6 Die Intuitionistischen Bedingungen

Anknüpfend außerhalb der intuitionistischen Kritik im allgemeinen, lasst uns zu Ende kommen, indem wir die intuitionistischen Bedingungen als eigenes Recht betrachten. Alle Behauptungen in den folgenden Abschnitten mittels $\models_I$ können durch passende Tableaux's überprüft werden, und gelten daher als Übungsaufgaben.

Die Intuitionistischen Bedingungen haben einen ungewöhnlichen Mix von Eigenschaften. Es erfüllt die Paradoxe der wesentlichen Bedingungen: $q \models p \sqsupset q$, $\rightharpoonup p \models p \sqsupset q$. Wie auch immer, folgendes ist falsch:

$$(p \wedge q) \sqsupset s \models (p \sqsupset s) \vee (q \sqsupset s)$$
$$(p \sqsupset q) \wedge (s \sqsupset t) \models (p \sqsupset t) \vee (s \sqsupset q)$$
$$\rightharpoonup (p \sqsupset q) \models p$$

Folgendes gilt in der intuitionistischen Logik:

$$p \sqsupset q \models \rightharpoonup q \sqsupset \rightharpoonup p$$
$$p \sqsupset q, q \sqsupset s \models p \sqsupset s$$
$$p \sqsupset s \models (p \wedge q) \sqsupset s$$

7 Beweise der Sätze

Die Korrektheits- und Vollständigkeitsbeweise für das intuitionistische Tableaux sind Modifikationen der Beweise für die normale modale Logik. Wir starten mit der Definition der Treue.

DEFINITION: Sei $I = [W, R, v]$ eine intuitionistische Interpretation und Z ein Pfad auf dem Tableau. Dann nennen wir I **treu** zu Z gdw. es existiert eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow W$, so dass:

für jeden Eintrag $A, +i$ auf Z gilt: A ist wahr in $f(i)$ in I
für jeden Eintrag $A, -i$ auf Z gilt: A ist falsch in $f(i)$ in I
falls irj auf Z, so $f(i)Rf(j)$ in I

KORREKTHEITSLEMMA:
Sei Z ein Pfad des Tableau und $I = [W, R, v]$ sei eine intuitionistische Interpretation. Wenn I treu zu Z ist und eine Tableau-Regel auf Z angewandt wurde, dann wird zunächst eine Erweiterung Z' produziert, so dass I treu zu Z' ist.

BEWEIS: Sei f eine Funktion, die zeigt, dass I treu zu Z ist. Der Beweis arbeitet alle Tableau-Regeln einfach durch. Die Regeln für die Regeln ρ und τ sind wie in der modalen Logik. Die Regeln für $\wedge$ und $\vee$ sind einfach. Für $\sqsupset$: angenommen $A \sqsupset B, +i$ und irj liegen auf Z und wir wenden die Regel auf, die den Pfad aufsplittet, um auf dem einen Pfad $A, -j$ und auf dem anderen $B, +j$ zu erzeugen. Dann ist $A \sqsupset B$ wahr auf $f(i)$ und $f(i)Rf(j)$. Daher ist A falsch auf $f(i)$ und I ist treu zum ersten Pfad, oder B ist wahr auf $f(i)$ und es ist treu zum zweiten Pfad. Angenommen $A \sqsupset B, -i$ ist auf Z und, dass wir die Regel anwenden, um irj, $A, +j$ und $B, -j$ mit neuem j zu erhalten. Dann ist $A \sqsupset B$ falsch auf $f(i)$. Daher gibt es ein w mit $f(i)Rw$, A wahr auf w und B falsch auf w. Sei f' das selbe wie f mit $f'(j) = w$. Dann zeigt f', dass I wie gehabt treu zum erweiterten Pfad ist. Für $\rightharpoonup$: Sei $\rightharpoonup A, +i$ und irj auf

Z, wir wenden die Regel an und erhalten $A, -j$. Dann ist $\neg A$ wahr auf $f(i)$ und $f(i)Rf(j)$, daher A ist falsch auf $f(i)$ wie gefordert. Sei $\neg A, -i$ auf Z und wir wenden die Regel an, um irj und $A, +j$ mit neuem j zu erhalten. Dann ist $\neg A$ falsch auf $f(i)$. Daher gibt es ein w mit $f(i)Rw$ und A ist wahr auf w. Sei f' wie oben, dann zeigt f', dass I treu zum erweiterten Pfad ist. Es bleibt nur noch die Vererbungsregel. Sei $p, +i$ und irj auf Z. Wir wenden die Regel an und erhalten $p, +j$. Da p wahr auf $f(i)$ ist und $f(i)Rf(j)$, ist p wahr auf $f(j)$ wegen der Vererbungsbedingung.

KORREKTHEITSSATZ/WIDERSPRUCHSFREIHEITSSATZ:
Für endliche Σ gilt: Wenn $\Sigma \vdash_I A$, so $\Sigma \models_I A$.

BEWEIS: Folgt aus dem Korrektheitslemma auf gewöhnliche Art und Weise.

DEFINITION: Sei Z ein offener Pfad des Tableaux. Die Interpretation $I = [W, R, v]$, die durch Z verursacht wird, ist wie für das zweite Beispiel definiert $W = \{w_i |\ i$ taucht auf Z auf$\}$. w_iRw_j gdw. irj taucht auf Z auf. $v_{w_i}(p) = 1$ gdw. $p, +i$ taucht auf Z auf.

LEMMA:
Wenn Z ein offener Pfad eines intuitionistischen Tableaux und I die verursachte Interpretation ist, dann ist I eine intuitionistische Interpretation.

BEWEIS: Zunächst, R erfüllt die Bedingungen ρ und τ, die werden nämlich mittels w_iRw_j gdw. irj einfach übernommen. Für die Vererbungsbedingung, angenommen dass p wahr in w_i und w_iRw_j. Dann ist $p, +i$ und irj taucht auf Z auf. Wenn wir die Vererbungsregel anwenden, $p, +j$ ist auf Z und daher ist p wie gefordert wahr in w_j aus I.

VOLLSTÄNDIGKEITSLEMMA:
Sei Z ein offener vollständiger Pfad des Tableau. Sei $I = [W, R, v]$ eine Interpretation, die durch Z verursacht wird. Dann gilt:

$$\text{wenn } A, +i \text{ auf } Z, \text{ dann ist } A \text{ wahr in } w_i$$
$$\text{wenn } A, -i \text{ auf } Z, \text{ dann ist } A \text{ falsch in } w_i$$

BEWEIS: Der Beweis läuft mittels der Rekursion an der Komplexität von A. Wenn A atomar ist, ist das Resultat nach Definition wahr und Z ist offen. Wenn $B \vee C, +i$ auf Z, dann ist entweder $B, +i$ oder $C, +i$ auf Z. Nach IV ist dann entweder B oder C wahr in w_i. Also ist $B \vee C$ wahr in w_i. Wenn $B \vee C, -i$ auf Z, dann sind $B, -i$ und $C, -i$ auf Z. Nach IV sind B und C falsch in w_i, und daher $B \vee C$ auch. Das Argument für $B \wedge C$ ist das gleiche. Wenn $B \sqsupset C, +i$ auf Z, dann ist für jedes j mit irj auf Z entweder $B, -j$ oder $C, +j$ auf Z. Nach Konstruktion und IV ist für jedes w_j mit w_iRw_j entweder B falsch in w_j oder C wahr in w_j. Also ist $B \sqsupset C$ wahr in w_i. Wenn $B \sqsupset C, -i$ auf Z, dann entsteht ein neues j mit irj, $B, +j$ und $C, -j$ auf Z. Nach Konstruktion und IV gibt es ein w_j mit w_iRw_j, so dass B wahr in w_j und C falsch in w_j ist. Also ist $B \sqsupset C$ falsch in w_i. Letzendlich wenn $\neg B, +i$ auf Z, dann haben wir für jedes j mit irj auf Z, $B, -j$ auf Z. Nach Konstruktion und IV gilt B ist falsch in w_j für jedes w_j mit w_iRw_j. Deswegen ist $\neg B$ wahr in w_i. Wenn $\neg B, -i$ auf Z, dann entsteht ein neues j mit irj und $B, +j$ auf Z. Nach Konstruktion und IV gibt es ein w_j, so dass w_iRw_j und B wahr in w_j. Daher ist $\neg B$ falsch in w_i.

VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ:
Für endliche Σ gilt: Wenn $\Sigma \models_I A$, so $\Sigma \vdash_I A$.

BEWEIS: Folgt aus den beiden vorhergehenden Lemmas.

8 Geschichte

Der Intuitionismus wurde zuerst vom niederländischen Mathematiker Brouwer in einigen Schriftstücken in der Zeit vom ersten Weltkrieg bis zu den frühen 50ern eingeführt. Der Name 'Intuitionismus' kommt von der Tatsache, dass Brouwer die Forderung von Kant, die Arithmetik ist eine reine Form der weltlichen Intuition, billigte. Die Intuitionistische Logik wurde zum ersten Mal durch einen niederländischen Logiker Heyting im Jahr 1930 als ein Axiomensystem definiert. Die enge Verbindung zwischen Intuitionistischer Logik und $K\rho\tau$ beobachtete Gödel 1933 noch vor der Neuentdeckung der Mögliche-Welten Semantik. Die erste Mögliche-Welten

Semantik für die Intuitionistische Logik gab Kripke im Jahr 1965 an. In den 70ern führte Dummett die Intuitionistische Logik in einigen anderen Gebieten ein.

9 Literaturliste

- Alexander Chagrov, Michael Zakharyaschev: „Modal Logic“ ,Oxford Science Publications 1997
- Graham Priest: „An Introduction to Non-Classical Logic“ ,Cambridge University Press 2001