Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Informatik
SE Nichtklassische Logiken
Olaf Beyersdorff und Prof. Dr. J. Köbler
Wintersemester 2002/2003

Normale Modale Logiken

Referent:
Peter Adolphs
peter.adolphs@student.hu-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Nach der Definition von Blackburn et al. (2001) sind modale Logiken all die Logiken, die es uns erlauben, mithilfe *modaler Operatoren* auf *relationalen Strukturen* zu schließen.

Relationale Strukturen bestehen aus einer Menge von Zuständen (klassischerweise den sogenannten *möglichen Welten*), die zueinander in Relation stehen, der sogenannten *Zugangsrelation*. Im Gegensatz zur klassischen Logik sind atomare Aussagen und damit auch komplexere Aussagen durch ein Modell nicht per se wahr oder falsch. Stattdessen ist die Gültigkeit abhängig von dem gerade betrachteten Zustand. Genau darin liegt auch die Modalität der modalen Logik: es werden verschiedene Modi der Wahrheit eingeführt.

Wir behandeln im Seminar ausschließlich modale Aussagenlogiken. Sie basieren auf klassischer Aussagenlogik, die um eine relationale Struktur und die modalen Operatoren $\Box$ und $\Diamond$ erweitert wurden (wobei sich einer aus dem anderen ableiten lässt). Diese Operatoren erlauben es uns, Aussagen über die relationale Struktur zu machen. Die klassische Sicht ist es dabei, $\Box$ als (logische) Notwendigkeit und $\Diamond$ als Möglichkeit zu verstehen. Es gibt aber auch andere Interpretationen, verbunden mit anderen Eigenschaften für die dadurch definierte Logik.

Die Definition von Blackburn et al. (2001) ist absichtlich sehr weit gefasst, um auch Logiken zu erfassen, die nicht in die 'klassische' Sicht modaler Logiken passt. Zum Beispiel beschränken sich modale Logiken nicht einfach nur auf den Gebrauch der Operatoren $\Box$ und $\Diamond$, wie Hans Kamps Since/Until-Logik zeigt. Dennoch gibt es viel Verbindendes zwischen den verschiedenen Logiken, so dass ein gemeinsamer Begriff 'modale Logik' sinnvoll ist.

2 Modale Aussagenlogik

2.1 Syntax

Definition (Aussagenvariable, *Var*)
$Var := \{p_1, p_2, \ldots\}$ ist eine abzählbar unendliche Menge von *Aussagenvariablen*.

Definition (Formeln der modalen Aussagenlogik, Fml_{MA})
Die Menge der Formeln der modalen Aussagenlogik, Fml_{MA}, wird rekursiv wie folgt definiert:

(i) Wenn $p_i \in Var$, so auch $p_i \in Fml_{MA}$.

(ii) Wenn $F, H \in Fml_{MA}$, so auch $(F \wedge H), (F \vee H), (F \rightarrow H), (F \leftrightarrow H), \neg F \in Fml_{MA}$.

(iii) Wenn $F \in Fml_{MA}$, so auch $\Box F, \Diamond F \in Fml_{MA}$.

Umschließende Klammern können weggelassen werden, wenn sich die ursprüngliche Formel eindeutig rekonstruieren lässt. Dabei gelten für die Operatoren die üblichen Bindungsregeln.

Die klassische Aussagenlogik und die modale Aussagenlogik unterscheiden sich syntaktisch also offensichtlich nur durch die hinzugenommene Definition (iii).

2.2 Semantik

Definition (Kripke-Rahmen, $\mathcal{F}$)
$\mathcal{F} = (W, R)$ heißt *Kripke-Rahmen* (auch *Rahmen*, *Frame*, *Kripke-Struktur*), wenn

(i) W eine nichtleere Menge ist, und

(ii) $R \subseteq W \times W$

W ist die Menge der sogenannten *möglichen Welten*. R ist die *Zugangsrelation* zwischen diesen möglichen Welten. Gilt $(g, h) \in R$, so heißt dies "*g erreicht h*".

Definition (Kripke-Modell, $\mathcal{M}$)

$\mathcal{M} = (W, R, v)$ heißt *Kripke-Modell* (auch *Modell*, *Interpretation*), wenn (W, R) ein Kripke-Rahmen ist, und v ist eine *Interpretationsfunktion* von Aussagenvariablen in Wahrheitswerte, $v : W \times \mathit{Var} \to \{0, 1\}$.

Definition (Wahrheitswert einer Formel, $V_{\mathcal{M}}(w, F)$)

Sei $\mathcal{M} = (W, R, v)$ ein Kripke-Modell. Sei $w \in W$, $p \in \mathit{Var}$, $F, H \in \mathit{Fml}_{MA}$. Seien $B_\wedge, B_\vee, B_\to, B_\leftrightarrow, B_\neg$ die booleschen Wahrheitsfunktionen[1]. Die Interpretationsfunktion V von Formeln der modalen Aussagenlogik in Wahrheitswerte, $V : W \times \mathit{Fml}_{MA} \to \{0, 1\}$, ist rekursiv wie folgt definiert:

$V_{\mathcal{M}}(w, p) = 1$	$:\Leftrightarrow$	$v(w, p) = 1$
$V_{\mathcal{M}}(w, F \wedge H) = 1$	$:\Leftrightarrow$	$B_\wedge(V_{\mathcal{M}}(w, F), V_{\mathcal{M}}(w, H))$
$V_{\mathcal{M}}(w, F \vee H) = 1$	$:\Leftrightarrow$	$B_\vee(V_{\mathcal{M}}(w, F), V_{\mathcal{M}}(w, H))$
$V_{\mathcal{M}}(w, F \to H) = 1$	$:\Leftrightarrow$	$B_\to(V_{\mathcal{M}}(w, F), V_{\mathcal{M}}(w, H))$
$V_{\mathcal{M}}(w, F \leftrightarrow H) = 1$	$:\Leftrightarrow$	$B_\leftrightarrow(V_{\mathcal{M}}(w, F), V_{\mathcal{M}}(w, H))$
$V_{\mathcal{M}}(w, \neg F) = 1$	$:\Leftrightarrow$	$B_\neg(V_{\mathcal{M}}(w, F))$
$V_{\mathcal{M}}(w, \Box F) = 1$	$:\Leftrightarrow$	für alle $w' \in W$ gilt: wenn wRw', dann $V_{\mathcal{M}}(w', F) = 1$
$V_{\mathcal{M}}(w, \Diamond F) = 1$	$:\Leftrightarrow$	es gibt ein $w' \in W$ mit wRw', so dass $V_{\mathcal{M}}(w', F) = 1$

Definition (Gültigkeit, Allgemeingültigkeit, $\models$)

Sei $\mathcal{M} = (W, R, v)$ ein Kripke-Modell, $w \in W$ und $F \in \mathit{Fml}_{MA}$.

(i) F ist *gültig* in $\mathcal{M}$ bezüglich w (kurz: $\mathcal{M}, w \models F$), falls $V_{\mathcal{M}}(w, F) = 1$

(ii) F ist *gültig* in $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models F$), falls für alle $w \in W$: $\mathcal{M}, w \models F$

(iii) F ist *allgemeingültig* ($\models F$), falls für alle $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models F$

Ist F allgemeingültig, so heißt F auch *Tautologie*.

Definition (Erfüllbarkeit)

Eine Formel $F \in \mathit{Fml}_{MA}$ heißt *erfüllbar*, falls es ein Modell $\mathcal{M}$ und eine Welt w so gibt, dass $\mathcal{M}, w \models F$.

[1] Zum Beispiel: $B_\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ mit $B_\wedge(p_1, p_2) = q$ nach folgender Tabelle:

p_1	p_2	q
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Definition (Folgern, $\models$)

Seien $F, H \in Fml_{MA}$, sei $\Sigma \subseteq Fml_{MA}$.

(i) F *folgt* aus H ($H \models F$), wenn für alle Kripke-Modelle $\mathcal{M} = (W, R, v)$ und $w \in W$ gilt: $\mathcal{M}, w \models H \;\Rightarrow\; \mathcal{M}, w \models F$

(ii) F *folgt* aus Σ ($\Sigma \models F$), wenn für alle Kripke-Modelle $\mathcal{M} = (W, R, v)$ und $w \in W$ gilt: $\mathcal{M}, w \models H$ für alle $H \in \Sigma \;\Rightarrow\; \mathcal{M}, w \models F$

Gültigkeit und Folgern sollten nicht wegen des gleichen Zeichens '$\models$' verwechselt werden. Manche Autoren unterscheiden daher zwei Zeichen und schreiben für Gültigkeit '$\Vdash$'.

Korollar

Sei $F \in Fml_{MA}$.

$$\models F \;\Leftrightarrow\; \emptyset \models F$$

Satz

Sei $\mathcal{M} = (W, R, v)$ ein Modell, $w \in W$ und $F \in Fml_{MA}$. Dann gilt:

- $\mathcal{M}, w \models \neg\Box F \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{M}, w \models \Diamond\neg F$
- $\mathcal{M}, w \models \neg\Diamond F \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{M}, w \models \Box\neg F$

Beweis

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, w \models \neg\Box F &\Leftrightarrow V_{\mathcal{M}}(w, \neg\Box F) = 1 \\
&\Leftrightarrow v_{\mathcal{M}}(w, \Box F) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{es gibt ein } w' \text{ mit } wRw' \text{ und } V_{\mathcal{M}}(w', F) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{es gibt ein } w' \text{ mit } wRw' \text{ und } V_{\mathcal{M}}(w', \neg F) = 1 \\
&\Leftrightarrow V_{\mathcal{M}}(w, \Diamond\neg F) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \Diamond\neg F
\end{aligned}$$

Der zweite Beweis erfolgt analog. $\Box$

Definition (*K*)

Die modale Logik K ist wie folgt defininiert:

$$K := \{F \in Fml_{MA} | \models F\}$$

Mithilfe der Begriffe Allgemeingültigkeit bzw. Folgern können wir also eine (extensionale) Definition der Logik K angeben. Statt $\models$ schreiben wir auch $\models_K$.

3 Tableau-Kalkül zu K

Definition (Tableau zu K)

Sei $\{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Menge von Formeln. Ein *Tableau zu K* ist ein endlicher, ungeordneter Baum, dessen Knoten mit Paaren von Formeln und natürlichen Zahlen oder mit Einträgen der Art irj ($i, j \in \mathbb{N}$) beschriftet sind, und der rekursiv wie folgt definiert ist:

(i) Der Baum bestehend aus einem einzelnen Pfad $Z = (F_1, 0; \ldots; F_n, 0)$ ist ein Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

(ii) Sei T ein Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$ und Z ein Pfad in T. T' entsteht aus T, wenn sich für eine der folgenden Regeln die Formeln über dem Pfeil (/den Pfeilen) auf Z befinden und die Formeln unter dem Pfeil (/den Pfeilen) an das Blatt von Z angehängt werden. T' ist dann ebenfalls ein Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

- Negationseliminierung:

$$\begin{array}{c} \neg\neg F, i \\ \downarrow \\ F, i \end{array}$$

- Konjunktive Expansion[2]:

$$\begin{array}{c} \alpha, i \\ \downarrow \\ \alpha_1, i \\ \alpha_2, i \end{array}$$

α	α_1	α_2
$F_1 \wedge F_2$	F_1	F_2
$\neg(F_1 \vee F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$
$\neg(F_1 \rightarrow F_2)$	F_1	$\neg F_2$

- Disjunktive Expansion[3]:

$$\begin{array}{ccc} & \beta, i & \\ \swarrow & & \searrow \\ \beta_1, i & & \beta_2, i \end{array}$$

β	β_1	β_2
$F_1 \vee F_2$	F_1	F_2
$\neg(F_1 \wedge F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$
$F_1 \rightarrow F_2$	$\neg F_1$	F_2
$F_1 \leftrightarrow F_2$	F_1	$\neg F_1$
	F_2	$\neg F_2$
$\neg(F_1 \leftrightarrow F_2)$	F_1	$\neg F_1$
	$\neg F_2$	F_2

[2]vgl. α-Expansion in Ganzinger (2002)
[3]vgl. β-Expansion in Ganzinger (2002)

- Negationseliminierung in modalem Kontext:

$$\begin{array}{c} \neg\Box F, i \\ \downarrow \\ \Diamond\neg F, i \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\Diamond F, i \\ \downarrow \\ \Box\neg F, i \end{array}$$

- Modale Expansion:

$$\begin{array}{c} \Box F, i \\ irj \\ \downarrow \\ F, j \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \Diamond F, i \\ \downarrow \\ irj \\ F, j \end{array}$$

für jedes j mit $irj \in Z$. $\qquad$ j kommt nicht auf Z vor

Definition (Geschlossener/Offener Pfad)
Sei T ein Tableau und Z ein Pfad in T. Z heißt *geschlossen*, falls es eine Formel F und eine Zahl i so gibt, dass $F, i \in Z$ und $\neg F, i \in Z$. Ansonsten heißt Z *offen*.

Definition (Geschlossenes/Offenes Tableau)
Sei T ein Tableau. T heißt *geschlossen*, falls alle Pfade in T geschlossen sind. Ansonsten heißt T *offen*.

Definition (Vollständiger Pfad)
Sei T ein Tableau und Z ein Pfad in T. Z heißt *vollständig*, falls für alle Formeln $F \in Z$ eine Formel existiert, die durch Anwendung einer Regel zu F entstanden ist.

Definition (Vollständiges Tableau)
Sei T ein Tableau. T heißt *vollständig*, falls alle Pfade in T vollständig sind.

Geschlossene Pfade werden durch ein Kreuz ($\times$) als Blatt gekennzeichnet.

Ein geschlossenes Tableau lässt sich finden, indem nach einem minimalen vollständigem Tableau T gesucht wird, und dann geprüft wird, ob es geschlossen ist. Dieser Prozess ist terminierend, da die Formeln durch die Tableau-Regeln immer weiter verkleinert werden.

Bisher haben wir symbolische Umformungen von betrachtet. Wie können diese Umformungen nun mit der Semantik unserer modalen Aussagenlogik gekoppelt werden? Der zentrale Begriff ist hier der der Erfüllbarkeit: wenn alle Formeln F auf einem Pfad Z in T erfüllbar sind, so ist offensichtlich auch das Tableau T erfüllbar.

Definition (Erfüllbarkeit eines Pfades)
Ein Pfad Z in einem Tableau heißt *erfüllbar*, falls es ein Modell $\mathcal{M} = (W, R, v)$ und eine Funktion $f : \mathbb{N} \to W$ so gibt, dass

(i) für alle $G, i \in Z$ gilt $\mathcal{M}, f(i) \models G$

(ii) für alle $irj \in Z$ gilt $f(i)Rf(j)$.

In diesem Fall sagt man auch: $\mathcal{M}$ *erfüllt* Z, und f *zeigt, dass* $\mathcal{M}$ Z *erfüllt.*

Definition (Erfüllbarkeit eines Tableaus)
Ein Tableau T heißt *erfüllbar*, falls es einen Pfad $Z \in T$ so gibt, dass Z erfüllbar ist.

Wann ist ein Pfad Z in T erfüllbar? Offensichtlich nicht, wenn der Pfad geschlossen ist. Offensichtlich doch, wenn er offen und vollständig ist.

Tableaux erlauben es also, die Erfüllbarkeit einer Formelmenge zu beweisen. Dies lässt sich auch für den Beweis der Allgemeingültigkeit einer Formel bzw. der Folgerung einer Formel aus einer Formelmenge nutzen. Zum Beispiel ist eine Formel F genau dann allgemeingültig, wenn ihre Negation $\neg F$ nicht erfüllbar ist. Um die Allgemeingültigkeit von F nachzuweisen müssen wir also nur ein geschlossenes Tableau für $\neg F$ finden. Diese Überlegungen rechtfertigen die folgende Definition:

Definition (Tableau-Ableitbarkeit, $\vdash_K$)
Sei $\Sigma \subseteq Fml_{MA}$ eine endliche Menge von Formeln und $F \in Fml_{MA}$ eine Formel. Dann ist F *in* K *Tableau-ableitbar aus* Σ (kurz: $\Sigma \vdash_K F$), falls es ein geschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg F\}$ gibt.

Den Allgemeingültigkeitsbegriff übertragen wir entsprechend, und sagen, dass $\vdash_K F$ genau dann gilt, wenn $\emptyset \vdash_K F$ gilt.

Es bleibt nun nur noch der Nachweis, dass die Tableaux zu K widerspruchsfrei und vollständig zur Semantik von K sind.

Lemma (Widerspruchsfreiheit der Tableau-Erweiterungsregeln)
Sei $\mathcal{M}$ ein Modell und Z ein Pfad in einem Tableau. Wenn $\mathcal{M}$ Z erfüllt, und die Pfade $Z_1, \ldots, Z_n$ durch Anwendung einer Erweiterungsregel für eine Formel in Z entstehen, so erfüllt $\mathcal{M}$ mindestens einen der Pfade Z_j.

Beweis
Der Beweis erfolgt durch die Betrachtung der einzelnen Tableau-Erweiterungsregeln:

- $\neg\neg F, i \in Z$:
  Z' entsteht aus Z durch Anhängen von F, i. $\mathcal{M}$ erfüllt Z, daher gilt $\mathcal{M}, f(i) \models \neg\neg F$. Dann gilt $\mathcal{M}, f(i) \models F$. Damit erfüllt $\mathcal{M}$ auch Z'.

  Die Fälle von konjunktiver Expansion erfolgen ähnlich.

- $F_1 \vee F_2, i \in Z$:
  Dann entstehen Z_1 und Z_2 aus Z durch Anhängen von F_1, i bzw. F_2, i. Wegen $\mathcal{M}$ erfüllt Z, gilt $\mathcal{M}, f(i) \models F_1 \vee F_2$. Daher gilt auch mindestens eine der folgenden Aussagen: (i) $\mathcal{M}, f(i) \models F_1$, (ii) $\mathcal{M}, f(i) \models F_2$. Daher erfüllt $\mathcal{M}$ auch mindestens einen Erweiterungspfad Z_j von Z.

  Die anderen Fälle von disjunktiver Expansion erfolgen analog.

- $\neg\Box F, i \in Z$:
  Dann entsteht Z' aus Z durch Anhängen von $\Diamond\neg F, i$. Außerdem gilt $\mathcal{M}, f(i) \models \neg\Box F$. Wie wir schon gezeigt haben, gilt dann auch $\mathcal{M}, f(i) \models \Diamond\neg F$.

  Der Fall für $\neg\Diamond F, i \in Z$ erfolgt analog.

- $\Box F, i \in Z$ und $irj \in Z$:
  Dann entsteht Z' aus Z durch Anhängen von F, j. $\mathcal{M}$ erfüllt Z, daher gilt $\mathcal{M}, f(i) \models \Box F$. Außerdem folgt aus $irj \in Z$ und der Definition von f, dass $f(i)Rf(j)$. Damit gilt $\mathcal{M}, f(j) \models F$. $\mathcal{M}$ erfüllt damit Z'.

- $\Diamond F, i \in Z$:
  Dann entsteht Z' aus Z durch Anhängen von F, j und irj für ein neues $j \in \mathbb{N}$. $\mathcal{M}$ erfüllt Z, daher gilt $\mathcal{M}, f(i) \models \Diamond F$. Für ein $w \in W$ gilt daher $\mathcal{M}, w \models F$. Sei nun

  $$f'(x) := \begin{cases} w & \text{, falls } x = j \\ f(x) & \text{, sonst} \end{cases}$$

  f' zeigt, dass $\mathcal{M}$ Z erfüllt, da sich f' von f nur durch Hinzunahme des Falles j unterscheidet, der in Z aber nicht vorkommt. Außerdem folgt aus $irj \in Z'$ und der Definition von f bzw. f', dass $f'(i)Rf'(j)$. $\mathcal{M}$ erfüllt also auch Z'. $\Box$

Theorem (Widerspruchsfreiheit von $\vdash_K$)

Sei T ein Tableau zu K für eine endliche Menge von Formeln $\Sigma = \{H_1, \ldots, H_n\}$ und F eine Formel. Dann gilt:

$$\Sigma \vdash_K F \quad \Rightarrow \quad \Sigma \models_K F$$

Beweis

Wir beweisen die Kontraposition. Es gelte also $\Sigma \not\models_K F$. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M}$ und eine Welt w so, dass $\mathcal{M}, w \models H_i$ für alle $H_i \in \Sigma$ und $\mathcal{M}, w \not\models F$. Zu zeigen: es gibt kein geschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg F\}$.

Sei nun f so, dass $f(0) = w$. f zeigt, dass $\mathcal{M}$ den Pfad $\{H_1, \ldots, H_n, \neg F\}$ (also das initiale Tableau) erfüllt. Durch wiederholte Anwendung des vorigen Lemmas auf Z und dessen erfüllbare Resultate erhalten wir einen vollständigen Pfad Z', sodass $\mathcal{M}$ Z' erfüllt. Wäre Z' nun geschlossen, so müsste es Formeln G, i und $\neg G, i$ enthalten. Da $\mathcal{M}$ aber Z' erfüllt, müsste sowohl $\mathcal{M}, f(i) \models G$, als auch $\mathcal{M}, f(i), \neg G$ gelten. Widerspruch! $\square$

Theorem (Vollständigkeit von $\vdash_K$)

Sei T ein Tableau zu K für eine endliche Menge von Formeln Σ und eine Formel F. Dann gilt:

$$\Sigma \models_K F \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash_K F$$

Beweis

Wir beweisen die Kontraposition. Es gelte also $\Sigma \not\vdash_K F$. Dann existiert kein geschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg F\}$. Das heißt, alle Tableaux für $\Sigma \cup \{\neg F\}$ sind offen. Sei nun T ein beliebiges vollständiges Tableau für $\Sigma \cup \{\neg F\}$, und sei Z ein offener Pfad in T.

Sei $\mathcal{M} = (W, R, v)$ ein Modell mit

- $W := \{w_i \mid i \text{ erscheint auf } Z\}$
- $w_i R w_j \quad :\Leftrightarrow \quad irj \in Z$
- $v(w_i, p) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } p, i \in Z \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$

Behauptung:

- $V_{\mathcal{M}}(w_i, H) = 1$, falls $H, i \in Z$
- $V_{\mathcal{M}}(w_i, H) = 0$, falls $\neg H, i \in Z$.

Der Beweis der Behauptung erfolgt induktiv über den Formelaufbau:

(i)
- $H \in \mathit{Var}$ und $H, i \in Z$:
  $v(w_i, H) = V_{\mathcal{M}}(w_i, H) = 1$ folgt unmittelbar aus der Definition von v.
- $H \in \mathit{Var}$ und $\neg H, i \in Z$:
  Dann ist $H \notin Z$, da Z offen ist. Also gilt nach Definition $v(w_i, H) = V_{\mathcal{M}}(w_i, H) = 0$.

(ii)
- $H_1 \wedge H_2, i \in Z$:
  Da Z vollständig ist, sind auch $H_1, i \in Z$ und $H_2, i \in Z$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $V_{\mathcal{M}}(w_i, H_1) = 1$ und $V_{\mathcal{M}}(w_i, H_2) = 1$. Damit gilt aber auch $V_{\mathcal{M}}(w_i, H_1 \wedge H_2) = 1$.
- $\neg(H_1 \wedge H_2), i \in Z$:
  Da Z vollständig ist, ist entweder $\neg H_1, i \in Z$ oder $\neg H_2, i \in Z$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $V_{\mathcal{M}}(w_i, H_1) = 0$ bzw. $V_{\mathcal{M}}(w_i, H_2) = 0$. Damit gilt aber auch $V_{\mathcal{M}}(w_i, H_1 \wedge H_2) = 0$.

Die Argumentation für alle anderen aussagenlogischen Formelkonstruktionen verläuft analog.

(iii)
- $\Box H', i \in Z$:
  Da Z vollständig ist, ist für alle j mit $irj \in Z$ auch $H', j \in Z$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $V_{\mathcal{M}}(w_j, H') = 1$. Zusammen mit $irj \in Z \Leftrightarrow w_i R w_j$ ergibt sich dann $V_{\mathcal{M}}(w_i, \Box H') = 1$.
- $\Diamond H', i \in Z$:
  Da Z vollständig ist, ist $irj \in Z$ und $H', j \in Z$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $V_{\mathcal{M}}(w_j, H') = 1$. Zusammen mit $irj \in Z \Leftrightarrow w_i R w_j$ ergibt sich dann $V_{\mathcal{M}}(w_i, \Diamond H') = 1$.
- $\neg(\Box H', i \in Z)$:
  Da Z vollständig ist, ist $\Diamond\neg H', i \in Z$. Siehe oben.
- $\neg(\Diamond H', i \in Z)$:
  Da Z vollständig ist, ist $\Box\neg H', i \in Z$. Siehe oben.

Es gilt nun $H, 0 \in Z$ für alle $H \in \Sigma$ und $\neg F, 0 \in Z$. Nach der Behauptung gibt es also ein Modell, nämlich $\mathcal{M}$, und eine Welt w, sodass $\mathcal{M}, w \models_K H$ für alle $H \in \Sigma$, aber $\mathcal{M}, w \not\models_K F$. Dann gilt $\Sigma \not\models_K F$. $\Box$

Führt die Anwendung der Erweiterungsregeln für eine Formelmenge zu einem vollständigen, offenen Tableau, so können wir daraus ein (Gegen-)modell ablesen. Dieses Modell erfüllt dann alle Formeln in der Formelmenge gleichzeitig. Wie das Modell abzulesen ist, folgt unmittelbar aus der Definition der Erfüllbarkeit eines Pfades.

4 Normale Modale Logiken

Wir haben bisher nur die modale Aussagenlogik K betrachtet. Wir haben dort definiert, wann eine Formel gültig ist oder wann sie aus anderen Formeln folgt. Beide Begriffe machen Aussagen über alle möglichen Kripke-Rahmen. Was ist aber, wenn wir nur an bestimmten relationalen Strukturen interessiert sind? Gelten andere Aussagen, wenn wir z.B. ausschließlich Kripke-Rahmen mit einer reflexiven Zugangsrelation behandeln? Das Themengebiet der normalen modalen Logiken beschäftigt sich mit dieser Frage. Durch das Vorraussetzen bestimmter Eigenschaften der Zugangsrelation R werden dabei verschiedene normale modale Logiken definiert.

Der folgende Abschnitt folgt weitgehend der Darstellung in Priest (2001). Wo es mir nötig erschien, habe ich die Begriffe etwas präzisiert. Die Definition normaler modaler Logiken habe ich von Huth and Ryan (2001) und Blackburn et al. (2001) auf die Herangehensweise von Priest (2001) übertragen.

Definition (Einige Eigenschaften von R)

- ρ, Reflexivität: für alle $w \in W$ gilt: wRw
- σ, Symmetrie: für alle $w_1, w_2 \in W$ gilt: $w_1Rw_2 \Rightarrow w_2Rw_1$
- τ, Transitivität: für alle $w_1, w_2, w_3 \in W$ gilt: $w_1Rw_2, w_2Rw_3 \Rightarrow w_1Rw_3$
- η, Erweiterbarkeit: für alle $w_1 \in W$ gibt es ein $w2 \in W$ so, dass w_1Rw_2
- υ, Universalität: für alle $w_1, w_2 \in W$ gilt: w_1Rw_2

Diese Eigenschaften können auch kombiniert werden. Zum Beispiel kann R die Eigenschaft $\rho\sigma$ erfüllen, also reflexiv und symmetrisch sein.

Satz

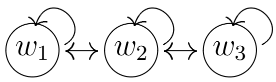
1. R erfüllt $\rho \Rightarrow R$ erfüllt η
2. R erfüllt σ, τ und $\eta \Rightarrow R$ erfüllt ρ
3. Alle anderen Kombinationen von ρ, τ und η sind unabhängig.
4. R erfüllt $\upsilon \Rightarrow R$ erfüllt ρ, σ, τ

Beweis

1. Offensichtlich: da R reflexiv ist, gibt es immer für jedes w_1 ein w_2, nämlich w_1 selbst, so dass w_1Rw_2.

2. Für jede Welt $w \in W$ gilt: da R erweiterbar ist, gibt es ein w', sodass wRw'. Da R symmetrisch ist, gilt dann auch $w'Rw$. Da transitiv ist, gilt wRw.

3. Es werden jeweils Beispiele für $\rho\sigma$, $\rho\tau$, $\rho\eta$, $\sigma\tau$, $\sigma\eta$ und $\tau\eta$ angegeben, die zeigen, dass die jeweils fehlende(n) Eigenschaft(en) nicht gilt(/gelten). Zum Beispiel wird für $\rho\sigma$ gezeigt, dass τ nicht gilt:

   Wäre R transitiv, so würde $w1Rw3$ gelten.

4. klar. □

Definition (Ψ-Rahmen, Ψ-Modell)

- Sei $\mathcal{F} = (W, R)$ ein Kripke-Rahmen und sei Ψ eine Eigenschaft von R. Dann heißt $\mathcal{F}$ auch Ψ-Rahmen.
- Sei $\mathcal{F} = (W, R)$ ein Ψ-Rahmen. Dann heißt das Modell $\mathcal{M} = (W, R, v)$ auch Ψ-Modell.

Erfüllt R zum Beispiel die Eigenschaft $\rho\sigma$, so ist jeder Rahmen $\mathcal{F}$ mit R ein $\rho\sigma$-Rahmen.

Definition (Allgemeingültigkeit in $K\Psi$, Folgern in $K\Psi$)

Sei Ψ eine Eigenschaft für Zugangsrelationen R.

- F heißt *allgemeingültig in* $K\Psi$ ($\models_{K\Psi} F$), falls für alle Ψ-Modelle $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models F$
- F *folgt in* $K\Psi$ aus H ($H \models_{K\Psi} F$), wenn für alle Ψ-Modelle $\mathcal{M} = (W, R, v)$ und $w \in W$ gilt: $\mathcal{M}, w \models H \;\Rightarrow\; \mathcal{M}, w \models F$
- F *folgt in* $K\Psi$ aus Σ ($\Sigma \models_{K\Psi} F$), wenn für alle Ψ-Modelle $\mathcal{M} = (W, R, v)$ und $w \in W$ gilt: $\mathcal{M}, w \models H$ für alle $H \in \Sigma \;\Rightarrow\; \mathcal{M}, w \models F$

Definition (Normale modale Logik $K\Psi$)

Sei Ψ eine Eigenschaft von R. Die normale modale Logik $K\Psi \subseteq K$ ist dann wie folgt defininiert:

$$K\Psi := \{F \in Fml_{MA} |\ \models_{K\Psi} F\}$$

Relationen zwischen möglichen Welten, die den verschiedenen Eigenschaften genügen, definieren also verschiedene normale modale Logiken. Mit der obigen Definition werden aber nicht allgemein normale modale Logiken definiert. Die kanonische Begriff einer 'normalen modalen Logik' wird mit einem Hilbert-Kalkül definiert, das mehr Logiken (im Sinne der Menge aller unter bestimmten Voraussetzungen geltenden Tautologien) beschreiben kann, als die obige Definition.

Historisch gesehen entspricht $K\rho$ der modalen Logik T, $K\eta$ entspricht D, $K\rho\sigma$ entspricht B, $K\rho\tau$ entspricht $S4$ und $K\rho\sigma\tau$ entspricht $S5$.

Wie passt nun die Definition von K selbst mit obiger Definition zusammen? Man muss eine Eigenschaft von R annehmen, sagen wir $\emptyset$, die R in keiner Weise einschränkt. Es ist dann leicht einzusehen, dass sich die Folgerungs- bzw. Allgemeingültigkeitsbegriffe $\models_{K\emptyset}$ und $\models_K$ gegenseitig entsprechen.

Definition (Erweiterung einer modalen Logik)

Eine modale Logik $K\Psi$ *erweitert* eine modale Logik $K\Phi$, wobei Ψ und Φ Eigenschaften von R sind, wenn für jedes $\Sigma \subseteq Fml_{MA}$ und ein beliebiges $F \in Fml_{MA}$ gilt:

$$\Sigma \models_{K\Psi} F \quad \Rightarrow \quad \Sigma \models_{K\Phi} F.$$

Definition (Äquivalenz von modalen Logiken)

Zwei modale Logiken $K\Psi$ und $K\Phi$ sind *äquivalent*, wenn für jedes $\Sigma \subseteq Fml_{MA}$ und ein beliebiges $F \in Fml_{MA}$ gilt:

$$\Sigma \models_{K\Psi} F \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \models_{K\Phi} F$$

Korollar

$K\Psi$ und $K\Phi$ sind äquivalent $\quad \Rightarrow \quad K\Psi = K\Phi$.

Satz

$K\rho\sigma\tau$ und $K\upsilon$ sind äquivalent.

Beweis

Sei $\Sigma \subseteq Fml_{MA}$ und $F \in Fml_{MA}$.

"$\Rightarrow$":

Gelte $\Sigma \models_{K\rho\sigma\tau} F$. Wir haben bereits gezeigt, dass, wenn R υ erfüllt, so erfüllt R auch $\rho\sigma\tau$. Daher gilt auch: $\Sigma \models_{K\upsilon} F$.

"$\Leftarrow$":

Gelte $\Sigma \not\models_{K\rho\sigma\tau} F$. Dann gibt es ein $\rho\sigma\tau$-Modell $\mathcal{M} = (W, R, v)$, sodass für ein $w \in W$ gilt: $\mathcal{M}, w \models H$ für alle $H \in \Sigma$, aber $\mathcal{M}, w \not\models F$.

Sei nun $W' := \{w'|wRw'\}$ die Äquivalenzklasse zu w. Sei R' die Restriktion von R auf W'[4]. Sei v' die Restriktion von v auf W'.

Folgerung 1: $\mathcal{M}' := (W', R', v')$ ist ein υ-Modell. Begründung: Sei $w_1, w_2 \in W'$. Dann gilt wRw_1 und wRw_2. Da ebenfalls $w \in W'$ (R ist reflexiv), gilt also auch $wR'w_1$ und $wR'w_2$. Wegen Symmetrie gilt dann $w_1R'w$. Wegen Transitivität gilt dann $w_1R'w_2$.

Folgerung 2: wenn $w_1 \in W'$ und w_1Rw_2, dann $w_2 \in W'$. Begründung: da $w_1 \in W'$ gilt wRw_1. Wegen Transitivität gilt dann wRw_2, d.h. $w_2 \in W'$. Liegt also ein w' in W', so erreicht w' über R und R' die selben Welten.

Für jedes $w \in W'$ und jede Formel $F \in Fml_{MA}$ gilt nun:

$$\mathcal{M}, w \models F \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}', w \models F \tag{1}$$

Der Beweis dazu erfolgt induktiv über den Formelaufbau:

(i) Für alle Aussagenvariablen gilt (1) trivialerweise.

(ii) Sei $F = F_1 \wedge F_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models F_1 \wedge F_2 &\Leftrightarrow B_\wedge(V_\mathcal{M}(w, F_1), V_\mathcal{M}(w, F_2)) = 1 \\ &\overset{\text{(IV)}}{\Leftrightarrow} B_\wedge(V_{\mathcal{M}'}(w, F_1), V_{\mathcal{M}'}(w, F_2)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}', w \models F_1 \wedge F_2 \end{aligned}$$

Die Argumentation für $F = F_1 \begin{smallmatrix} \vee \\ \to \\ \leftrightarrow \end{smallmatrix} F_2$ bzw. $F = \neg F'$ erfolgt analog.

(iii) Sei $F = \Box F'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models \Box F' &\Leftrightarrow \text{für alle } w' \in W \text{ mit } wRw'\text{: } \mathcal{M}, w' \models F' \\ &\overset{\text{(Def } W', wRw')}{\Leftrightarrow} \text{für alle } w' \in W' \text{ mit } wRw'\text{: } \mathcal{M}, w' \models F' \\ &\overset{\text{(F2)}}{\Leftrightarrow} \text{für alle } w' \in W' \text{ mit } wR'w'\text{: } \mathcal{M}, w' \models F' \\ &\overset{\text{(IV)}}{\Leftrightarrow} \text{für alle } w' \in W' \text{ mit } wR'w'\text{: } \mathcal{M}', w' \models F' \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}', w \models \Box F' \end{aligned}$$

Sei $F = \Diamond F'$. Die Argumentation erfolgt dann analog. □

Wegen (1) gilt auch $\mathcal{M}', w \models H$ für alle $H \in \Sigma$ und $\mathcal{M}', w \not\models F$. Da $\mathcal{M}'$ ein υ-Modell ist, gilt also $\Sigma \not\models_{K\upsilon} F$.

[4] d.h. es gilt für $w_1, w_2 \in W'$: $w_1R'w_2 :\Leftrightarrow w_1Rw_2$

5 Tableaux für Normale Modale Logiken

Definition (Tableaux für normale modale Logiken)

Ein Tableau für normale modale Logiken ist genauso definiert wie zuvor. Je nachdem, welche Eigenschaften R erfüllt, werden folgende Erweiterungsregeln für den Pfad Z hinzu genommen:

ρ	σ	τ	η
		irj	
	irj	jrk	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
iri	jri	irk	irj
$i \in Z$			$i \in Z$
			j neu

Wie zuvor darf eine Regel nicht angewendet werden, wenn sie eine Formel auf diesem Pfad dupliziert.

Wir werden später zeigen, dass die neuen Tableau-Kalküle bezogen auf die jeweilige Semantik vollständig und widerspruchsfrei sind.

Beispiel

1. $\vdash_{K\rho} \Box p \to p$

$$
\begin{array}{lcl}
1: & \neg(\Box p \to p), 0 & \\
 & \downarrow & \\
2: & 0r0 & (R \text{ reflexiv}) \\
 & \downarrow & \\
3: & \Box p, 0 & (1) \\
4: & \neg p, 0 & \\
 & \downarrow & \\
5: & p, 0 & \\
 & \times &
\end{array}
$$

Es gilt $\not\models_K \Box p \Rightarrow p$. Unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit unseres Tableau zur Semantik von $K\rho$ haben wir gezeigt, dass $K\rho$ ein echte Erweiterung von K ist.

2. $\vdash_{K\sigma} p \to \Box\Diamond p$

$$
\begin{array}{lc}
1: & \neg(p \to \Box\Diamond p), 0 \\
 & \downarrow
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lcl}
2: & p, 0 & (1) \\
3: & \neg\Box\Diamond p, 0 & \\
 & \downarrow & \\
4: & \Diamond\neg\Diamond p, 0 & (3) \\
 & \downarrow & \\
5: & 0r1 & (4) \\
6: & \neg\Diamond p, 1 & \\
 & \downarrow & \\
7: & \Box\neg p, 1 & (6) \\
 & \downarrow & \\
8: & 1r0 & (R \text{ symmetrisch}) \\
 & \downarrow & \\
9: & \neg p, 0 & (7,\ 8) \\
 & \times &
\end{array}$$

Es gilt $\not\models_K p \Rightarrow \Box\Diamond p$. Unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit unseres Tableau zur Semantik von $K\sigma$ haben wir gezeigt, dass $K\sigma$ ein echte Erweiterung von K ist.

3. $\vdash_{K\tau} \Box p \to \Box\Box p$

$$\begin{array}{lcl}
1: & \neg(\Box p \to \Box\Box p), 0 & \\
 & \downarrow & \\
2: & \Box p, 0 & (1) \\
3: & \neg\Box\Box p, 0 & \\
 & \downarrow & \\
4: & \Diamond\neg\Box p, 0 & (3) \\
 & \downarrow & \\
5: & 0r1 & (4) \\
6: & \neg\Box p, 1 & \\
 & \downarrow & \\
7: & \Diamond\neg p, 1 & (6) \\
 & \downarrow & \\
8: & 1r2 & (7) \\
9: & \neg p, 2 & \\
 & \downarrow & \\
10: & 0r2 & (R \text{ transitiv}) \\
 & \downarrow & \\
11: & p, 2 & (10,\ 2) \\
 & \times &
\end{array}$$

Es gilt $\not\models_K \Box p \Rightarrow \Box\Box p$. Unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit unseres Tableau zur Semantik von $K\tau$ haben wir gezeigt, dass $K\tau$ ein echte Erweiterung von K ist.

4. $\vdash_{K\eta} \Box p \to \Diamond p$

$$\begin{array}{rcl}
1: & \neg(\Box p \to \Diamond p), 0 & \\
 & \downarrow & \\
2: & \Box p, 0 & (1) \\
3: & \neg\Diamond p, 0 & \\
 & \downarrow & \\
4: & \Box\neg p, 0 & (3) \\
 & \downarrow & \\
5: & 0r1 & (R \text{ erweiterbar}) \\
 & \downarrow & \\
6: & p, 1 & (5,\ 2) \\
 & \downarrow & \\
7: & \neg p, 1 & (5,\ 4) \\
 & \times &
\end{array}$$

Es gilt $\not\models_K \Box p \to \Diamond p$. Unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit unseres Tableau zur Semantik von $K\eta$ haben wir gezeigt, dass $K\eta$ ein echte Erweiterung von K ist.

Empfohlenes Vorgehen bei ‘komplexeren’ Systemen (R erfüllt mehr als eine Eigenschaft):

1. $\Diamond$-Regel zuerst[5]
2. füge alle nötigen r-Fakten anhand obiger Regeln hinzu
3. berechne für evtl. auf dem Pfad liegende $\Box A, i$ die Konsequenzen

Gegenmodelle können wie gewohnt abgelesen werden.

Die Regel für η kann zu unendlichen Tableaux führen. Dies ist dann der Fall, wenn wir sie immer dann anwenden, wenn wir es können. In dem Fall wird für jedes neu eingeführte j sofort wieder ein neuer Index k eingeführt, für den wiederrum die Regel erneut angewendet werden kann, usw. Offensichtlich ist die Anwendung der Regel aber dann sinnvoll, wenn keine andere Regel ausgeführt werden kann.

[5]
$$\begin{array}{c}
\Diamond A, i \\
\downarrow \\
i \to j \\
A, j
\end{array}$$

Aber auch dann kann das Tableau unendlich werden, immer dann nämlich, wenn das Tableau nicht geschlossen werden *kann*. Gegenmodelle lassen sich dann nicht systematisch finden, auch wenn sie endlich sind.

Beispiel

$\nvdash_{K\eta} \Box p$

$$\begin{array}{rcl}
1: & \neg(\Box p), 0 & \\
 & \downarrow & \\
2: & \Diamond\neg p, 0 & (1) \\
 & \downarrow & \\
3: & 0r1 & (2) \\
4: & \neg p, 1 & \\
 & \downarrow & \\
5: & 1r2 & (R \text{ erweiterbar}) \\
 & \downarrow & \\
6: & 2r3 & (R \text{ erweiterbar}) \\
 & \downarrow & \\
 & \ldots &
\end{array}$$

Daraus lässt sich das folgende unendliche Gegenmodell ablesen:

$$\begin{tikzcd}
w_0 \arrow[r] & w_1 \arrow[r] & w_2 \arrow[r] & \cdots \\
 & \neg p & &
\end{tikzcd}$$

Das folgende einfachere, endliche Gegenbeispiel lässt sich nur durch Überlegung finden:

$$\begin{tikzcd}
w_0 \arrow[loop above] \\
\neg p
\end{tikzcd}$$

Für v-Interpretationen können wir R bei der Auswertung der Wahrheitswerte ignorieren. Ebenso können dann alle r-Einträge im Tableau ignoriert werden. Die $\Box$-Erweiterungsregel kann dann einfach für jedes i, das auf Z vorkommt angewendet werden.

Theorem (Widerspruchsfreiheit)

1. Die Tableaux zu $K\rho$, $K\sigma$, $K\tau$ und $K\eta$ sind widerspruchsfrei zu ihrer jeweiligen Semantik.

2. Die Tableaux zu Systemen mit kombinierten Eigenschaften von ρ, σ, τ und η von R sind widerspruchsfrei zu ihrer jeweiligen Semantik.

Beweis

Wir müssen zeigen, dass das Lemma über die Widerspruchsfreiheit der jeweiligen Tableau-Erweiterungsregeln immer noch gilt. Es gelte also jeweils, dass eine Funktion f zeige, dass $\mathcal{M}$ den Pfad Z erfüllt. Zu zeigen ist dann, dass $\mathcal{M}$ zumindest einen der aus Z entstehenden Pfade Z_i immer noch erfüllt:

- R ist reflexiv (ρ):
  Dann entsteht Z' durch Anhängen von iri an Z. f zeigt dann auch, dass $\mathcal{M}$ Z' erfüllt, da $f(i)Rf(i)$ wegen Reflexivität von R.

- R ist symmetrisch (σ), $irj \in Z$:
  Dann ist $jri \in Z'$. Da f zeigt, dass $\mathcal{M}$ Z erfüllt, gilt $f(i)Rf(j)$. Da R symmetrisch ist, gilt dann auch $f(j)Rf(i)$. $\mathcal{M}$ erfüllt somit auch Z'.

- R ist transitiv (τ), $irj, jrk \in Z$:
  Dann ist $irk \in Z'$. Zudem gilt $f(i)Rf(j)$ und $f(j)Rf(k)$. Wegen Transitivität gilt dann auch $f(i)Rf(j)$. $\mathcal{M}$ erfüllt somit auch Z'.

- R ist erweiterbar (η):
  Dann ist $irj \in Z'$ für ein neues $j \in \mathbb{N}$. Da R erweiterbar ist, gilt $f(i)Rw$ für irgendein $w \in W$. Sei f' genauso definiert wie f, nur dass $f'(j) := w$. f und deswegen auch f' (da j nicht in Z vorkommt) zeigen, dass $\mathcal{M}$ Z erfüllt. Wegen der Erweiterbarkeit von R gilt zusätzlich $f'(i)Rf'(j)$. f' zeigt also auch, dass $\mathcal{M}$ Z' erfüllt.

Für die Kombinationen von Eigenschaften von R werden die obigen Argumente kombiniert. □

Theorem (Vollständigkeit)

1. Die Tableaux zu $K\rho$, $K\sigma$, $K\tau$ und $K\eta$ sind vollständig zu ihrer jeweiligen Semantik.

2. Die Tableaux zu Systemen mit kombinierten Eigenschaften von ρ, σ, τ und η auf R sind vollständig zu ihrer jeweiligen Semantik.

Beweis

Sei Ψ eine der Eigenschaften ρ, σ, τ oder η.

Der Beweis erfolgt wie bei dem Vollständigkeitsbeweis zu $\vdash_K$. Es gelte also wieder $\Sigma \nvdash_{K\Psi} F$. Wie zuvor konstruieren wir ein Modell $\mathcal{M} = (W, R, v)$ anhand der Formeln auf einem der dann existierenden vollständigen Tableaux mit einem offenen Pfad Z:

- $W := \{w_i \mid i \text{ erscheint auf } Z\}$
- $w_i R w_j \quad :\Leftrightarrow \quad irj \in Z$
- $v(w_i, p) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } p, i \in Z \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$

Wir haben schon gezeigt, dass mit diesem Modell gilt:

- $V_{\mathcal{M}}(w_i, H) = 1$, falls $H, i \in Z$
- $V_{\mathcal{M}}(w_i, H) = 0$, falls $\neg H, i \in Z$.

Wir müssen nun nur noch zeigen, dass R bei Anwendung der Tableau-Regeln für Ψ die Eigenschaft Ψ erfüllt:

- Tableau-Erweiterungsregeln für ρ:
  Für jedes i, das auf Z vorkommt, gibt es nach der Definition von $\mathcal{M}$ eine Welt $w_i \in W$. Da Z vollständig ist, ist $iri \in Z$ durch Anwendung der ρ-Erweiterungsregel. Nach der Definition von R gilt dann $w_i R w_i$. R ist also reflexiv.

- Tableau-Erweiterungsregeln für σ
  Angenommen $irj \in Z$. Da Z vollständig ist, ist auch $jri \in Z$. Nach Definition von $\mathcal{M}$ gilt dann $w_i R w_j$ und $w_j R w_i$. Das heißt, R ist symmetrisch.

- Tableau-Erweiterungsregeln für τ:
  Angenommen $irj \in Z$ und $jrk \in Z$. Da Z vollständig ist, ist auch $irk \in Z$. Nach Definition von $\mathcal{M}$ gilt dann $w_i R w_j$, $w_j R w_k$ und $w_i R w_k$. Das heißt, R ist transitiv.

- Tableau-Erweiterungsregeln für η:
  Wenn i auf Z vorkommt, so gibt es ein $w_i \in W$. Da Z vollständig ist, wurde die η-Erweiterungsregel angewendet. Daher gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $irj \in Z$. Nach Definition von $\mathcal{M}$ gilt dann $w_i R w_j$. Das heißt, R ist erweiterbar. $\square$

Wie zuvor gilt nun: da $H_i, 0 \in Z$ für alle $H_i \in \Sigma$ und $\neg F, 0 \in Z$, gilt $\mathcal{M}, w \models H_i$ und $\mathcal{M}, w \not\models F$. Daher gilt $\Sigma \not\models_{K\Psi} F$.

Für Kombinationen von Eigenschaften von R werden die obigen Argumente kombiniert.

6 Logic Engineering

Wir haben bisher gesehen, wie sich die verschiedenen normalen modalen Aussagenlogiken in ihrer Semantik voneinander unterscheiden. Klassischerweise wird $\Box$ als Notwendigkeit und $\Diamond$ als Möglichkeit verstanden[6]. Es sind aber auch andere Interpretationen der modalen Operatoren denkbar. Für welche Fälle sollten wir nun welche der Logiken verwenden? Das heißt, wie können wir $\Box$ und $\Diamond$ tatsächlich interpretieren und welche Logik entspricht dieser Interpretation dann?

Dieses Kapitel stellt hauptsächlich die Überlegungen in Huth and Ryan (2001) vor. Für die möglichen Interpretationen von $\Box$ bzw. $\Diamond$ habe ich auch die entsprechenden Abschnitte aus Priest (2001) hinzugezogen.

$\Box F$ wird auf verschiedene Weisen interpretiert. Darunter sind zum Beispiel die folgenden:

- es ist (logisch) notwendig, dass F
- es wird immer der Fall sein, dass F
- es ist die moralische Pflicht, dass F (im Engl.: *ought*; deontische Logik)
- Agent Q glaubt, dass F (doxastische Logik)
- Agent Q weiß, dass F (epistemische Logik)
- nach jeder Ausführung des Programms P gilt F

Wie wir schon gesehen haben, können wir $\Diamond$ mit Hilfe von $\Box$ formulieren. So gilt $\Diamond F$ immer dann, wenn $\neg\Box\neg F$ gilt. Aus den obigen Interpretationen für $\Box$ können wir also unmittelbar die Interpretationen für $\Diamond$ ableiten:

[6]Damit ist aber nicht unser intuitives Verständnis von 'Notwendigkeit' gemeint. Dieses besagt, dass alles, was notwendig ist, auch gilt. Allgemein gilt also für unser Verständnis von 'Notwendigkeit', dass $\Box F \to F$. Dies gilt nicht in K.

$\Box F$	$\Diamond F$
es ist (logisch) notwendig, dass F	es ist möglich, dass F
es wird immer der Fall sein, dass F	irgendwann in der Zukunft gilt F
es ist die moralische Pflicht, dass F	es ist erlaubt, dass F
Q glaubt, dass F	F ist konsistent mit Q's Glauben
Q weiß, dass F	F ist konsistent mit Q's Wissen
nach jeder Ausführung von P gilt F	es gibt eine Ausführung von P so, dass F

Wir können nun versuchen, die jeweilige Logik zu bestimmen, indem wir uns die Eigenschaften der Zugangsrelation näher anschauen. Wir können uns hier fragen, welches Verständnis wir von der Zugangsrelation R haben, wenn wir eine bestimmte Interpretation von $\Box$ voraussetzen:

$\Box F$	$w_1 R w_2$
es ist (logisch) notwendig, dass F	w_2 ist eine mögliche Welt mit den Informationen von w_1
es wird immer der Fall sein, dass F	w_2 liegt in der Zukunft von w_1
es ist die moralische Pflicht, dass F	w_2 ist moralisch akzeptierbar mit den moralischen Gegebenheiten von w_1
Q glaubt, dass F	w_2 könnte nach allem, was Q in w_1 glaubt, die tatsächlich Welt sein
Q weiß, dass F	w_2 könnte nach allem, was Q in w_1 weiß, die tatsächlich Welt sein
nach jeder Ausführung von P gilt F	w_2 ist ein möglicher Zustand nach Ablauf von P in w_1

Wir müssen uns dann fragen, welche Eigenschaften von R aus dem jeweiligen Verständnis von R folgen. Zum Beispiel können wir feststellen, dass R im Falle von 'wissen' reflexiv sein sollte. Dies besagt, dass die aktuelle Welt w für Q die aktuelle Welt sein könnte. Das entspricht unserem Verständnis von 'wissen'. Eine epistemische Logik muss also mindestens $K\rho$ entsprechen.

Um festzustellen, welche Logik unserer jeweiligen Interpretation von $\Box$ am besten erfasst, können wir uns alternativ auch die Gültigkeit bestimmter Formeln anschauen. Zum Beispiel besagt unser Verständnis von 'wissen', dass, wenn wir F wissen, dann tatsächlich auch F gilt. Das heißt, es gilt $\Box F \to F$. Diese Formel gilt aber nicht in K, da sich ein einfaches Gegenbeispiel finden lässt (eine einzige Welt ohne Übergänge, in der F nicht gilt).

Auf diese Weise können wir eine Reihe von Formeln aufstellen und die Allgemeingültigkeit für die jeweiligen Interpretation von $\Box$ prüfen. Wir können damit die zu der jeweiligen Interpretation gehörende Logik näher charakterisieren:

$\Box F$	$\Box F \to F$	$\Box F \to \Box\Box F$	$\Diamond F \to \Box\Diamond F$	$\Diamond\top$	$\Box F \to \Diamond F$	$\Box F \vee \Box\neg F$	$\Box(F \to G) \wedge \Box F \to \Box G$	$\Diamond F \wedge \Diamond F \to \Diamond(F \wedge G)$
es ist (logisch) notwendig, dass F	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$
es wird immer der Fall sein, dass F	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$
es ist die moralische Pflicht, dass F	$\times$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$
Q glaubt, dass F	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$
Q weiß, dass F	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$
nach jeder Ausführung von P gilt F	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$

Eine Möglichkeit ist nun, eine Logik mit Hilfe einer geeigneten Charakterisierung dieser Art *syntaktisch* zu definieren. In der Tat waren die ersten Charakterisierungen von modalen Logiken solche syntaktische Charakterisierungen mittels eines Hilbert-Kalküls. Mit einem Satz von Axiomen und wenigen Schlussregeln lassen sich dann alle Tautologien einer Logik syntaktisch herleiten. Es ist damit aber auch möglich, Logiken zu beschreiben, die sich nicht über die Eigenschaften von R beschreiben lassen (nicht-normale modale Logiken).

Die *Korrespondenztheorie* stellt den Bezug zwischen beiden Ansätzen her. Sie verbindet die Charakterisierungen einer Logik über die Zugangsrelation R mit den syntaktischen Charakterisierungen. Zum Beispiel gibt es eine Korrespondenz zwischen der Formel $\Box F \to F$ und der Eigenschaft ρ von R, sowie zwischen $\Box F \to \Box\Box F$ und τ. Diese Beziehungen können helfen, wenn eine Logik zu einer bestimmten Interpretation von $\Box$ entwickelt oder gefunden werden muss.

Literatur

Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

Harald Ganzinger. Logic in computer science. Vorlesung an die Uni Saarbrücken im Sommersemester, 2002.

Michael Huth and Mark Ryan. *Logic in Computer Science. Modelling and reasoning about systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

Graham Priest. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.