Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität II
Prof. Dr. Johannes Köbler

WS 2003/2004
27. Januar 2004

Theoretische Informatik II

11. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 3., 4., 5. und 6. Februar
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 10., 11., 12. und 13. Februar

Aufgabe 50 [mündlich]

Sei Σ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. Die lexikographische Ordnung auf Σ^* ist dann durch

$$x < y :\Leftrightarrow \begin{cases} |x| < |y| & \text{oder} \\ |x| = |y|,\ x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1} \text{ und } x_i < y_i \text{ für ein } i \leq |x| \end{cases}$$

gegeben. Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ ist *in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar*, falls $A = \emptyset$ oder falls es eine Turing-berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit Wertebereich A gibt, so dass $f(x) \leq f(y)$, falls $x < y$. Zeigen Sie:

1. A ist genau dann in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar, wenn A entscheidbar ist.
2. Jede unendliche rekursiv aufzählbare Menge besitzt eine unendliche entscheidbare Teilmenge. (Hinweis: Konstruieren Sie eine Teilmenge, die in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar ist.)

Aufgabe 51 [mündlich]

Die Goldbachsche Vermutung lautet: Jede gerade Zahl grösser 3 ist die Summe zweier Primzahlen. Es ist unbekannt, ob diese Vermutung gilt.

1. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion f rekursiv ist:

$$f(n) := \begin{cases} 1, \text{ falls die Goldbachvermutung stimmt} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

2. Beschreiben Sie informell eine TM, die bei einer beliebigen Eingabe genau dann eine 1 ausgibt, wenn die Goldbachvermutung falsch ist.

Aufgabe 52 [4 Punkte]

Sei A eine beliebige rekursiv aufzählbare und B eine beliebige rekursive Sprache.

1. Ist $A \setminus B$ rekursiv?
2. Ist $B \setminus A$ rekursiv?
3. Ist $A \setminus B$ rekursiv aufzählbar?
4. Ist $B \setminus A$ rekursiv aufzählbar?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 53 [6 Punkte]

Für zwei Sprachen A und B sei die *markierte Vereinigung* $A \oplus B$ definiert durch

$$A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}.$$

Zeigen Sie ($\leq$ bezeichnet die Reduktionsrelation):

1. $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.
2. $A \oplus B$ ist genau dann rekursiv, wenn A und B rekursiv sind.
3. $A \oplus B$ ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn A und B rekursiv aufzählbar sind.
4. Für alle Sprachen C gilt: $A \oplus B \leq C$ genau dann, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$.

Aufgabe 54 [mündlich]

Zeigen Sie:

1. Die Reduktionsrelation $\leq$ ist reflexiv und transitiv.
2. Jede rekursive Menge lässt sich auf die Menge $\{1\} \subset \{0,1\}^*$ reduzieren.
3. Jede rekursiv aufzählbare Menge lässt sich auf das Halteproblem reduzieren.

Aufgabe 55 [mündlich]

1. Zeigen Sie, dass eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn es eine Turing-berechenbare partielle Funktion f gibt, so dass A der Definitionsbereich von f ist.
2. Beweisen sie die folgende Variante des Satzes von Rice: Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\mathcal{S} \notin \{\emptyset, \mathcal{RE}\}$ ist die Sprache

   $$K(\mathcal{S}) := \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$$

   unentscheidbar.