Theoretische Informatik II

11. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 3., 4., 5. und 6. Februar
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 10., 11., 12. und 13. Februar

Aufgabe 50 [mündlich]

Sei Σ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. Die lexikographische Ordnung auf Σ^* ist dann durch

$$x < y :\Leftrightarrow \begin{cases} |x| < |y| & \text{oder} \\ |x| = |y|,\ x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1} \text{ und } x_i < y_i \text{ für ein } i \leq |x| \end{cases}$$

gegeben. Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ ist *in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar*, falls $A = \emptyset$ oder falls es eine Turing-berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit Wertebereich A gibt, so dass $f(x) \leq f(y)$, falls $x < y$. Zeigen Sie:

1. A ist genau dann in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar, wenn A entscheidbar ist.
2. Jede unendliche rekursiv aufzählbare Menge besitzt eine unendliche entscheidbare Teilmenge. (Hinweis: Konstruieren Sie eine Teilmenge, die in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar ist.)

Aufgabe 51 [mündlich]

Die Goldbachsche Vermutung lautet: Jede gerade Zahl grösser 3 ist die Summe zweier Primzahlen. Es ist unbekannt, ob diese Vermutung gilt.

1. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion f rekursiv ist:

$$f(n) := \begin{cases} 1, \text{ falls die Goldbachvermutung stimmt} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

2. Beschreiben Sie informell eine TM, die bei einer beliebigen Eingabe genau dann eine 1 ausgibt, wenn die Goldbachvermutung falsch ist.

Aufgabe 52 [4 Punkte]

Sei A eine beliebige rekursiv aufzählbare und B eine beliebige rekursive Sprache.

1. Ist $A \setminus B$ rekursiv?
2. Ist $B \setminus A$ rekursiv?
3. Ist $A \setminus B$ rekursiv aufzählbar?
4. Ist $B \setminus A$ rekursiv aufzählbar?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 53 [6 Punkte]

Für zwei Sprachen A und B sei die *markierte Vereinigung* $A \oplus B$ definiert durch

$$A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}.$$

Zeigen Sie ($\leq$ bezeichnet die Reduktionsrelation):

1. $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.
2. $A \oplus B$ ist genau dann rekursiv, wenn A und B rekursiv sind.
3. $A \oplus B$ ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn A und B rekursiv aufzählbar sind.
4. Für alle Sprachen C gilt: $A \oplus B \leq C$ genau dann, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$.

Aufgabe 54 [mündlich]

Zeigen Sie:

1. Die Reduktionsrelation $\leq$ ist reflexiv und transitiv.
2. Jede rekursive Menge lässt sich auf die Menge $\{1\} \subset \{0,1\}^*$ reduzieren.
3. Jede rekursiv aufzählbare Menge lässt sich auf das Halteproblem reduzieren.

Aufgabe 55 [mündlich]

1. Zeigen Sie, dass eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn es eine Turing-berechenbare partielle Funktion f gibt, so dass A der Definitionsbereich von f ist.
2. Beweisen sie die folgende Variante des Satzes von Rice: Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\mathcal{S} \notin \{\emptyset, \mathcal{RE}\}$ ist die Sprache

   $$K(\mathcal{S}) := \{\, w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \,\}$$

   unentscheidbar.