Klausuraufgaben Theoretische Informatik II

Aufgabe 1 [40 Punkte]

Gegeben sei der reguläre Ausdruck $A = (0|\epsilon)(10)^*$.

1. Konstruieren Sie den zugehörigen NFA. **Hinweis:** Verwenden Sie die drei Beobachtungen auf der Rückseite.
2. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $R_{L(A)}$ an.
3. Konstruieren Sie den Äquivalenzklassenautomaten für $L(A)$.
4. Geben Sie einen NFA für $L(A)$ mit zwei Zuständen an.

Aufgabe 2 [30 Punkte]

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Geben Sie im Falle der Regularität einen DFA an und argumentieren Sie für nicht reguläre Sprachen mit dem Pumping-Lemma.

1. $L_1 = \{a^l b^m a^n \mid l = n \text{ oder } m \geq 1\}$
2. $L_2 = \{a^l b^m a^n \mid l = n \text{ und } m \geq 1\}$

Aufgabe 3 [20 Punkte]

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den Produktionen P: $S \to caSb, b$.

1. Wandeln Sie G in Chomsky-Normalform um (Verfahren aus der Vorlesung).
2. Entscheiden Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $w = cacabbba$ zu $L(G)$ gehört.

Aufgabe 4 [20 Punkte]

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ akzeptiert nur Wörter der Länge } \leq 1000\}$
2. $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hat } \leq 1000 \text{ Zustände }\}$
3. $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists v : L(M_w) \cup L(M_v) = \Sigma^*\}$
4. $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists v : L(M_w) \cup L(M_v) = \Sigma^* \text{ und } L(M_w) \cap L(M_v) = \emptyset\}$

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Beweisen Sie, dass das Halteproblem nicht auf sein Komplement reduzierbar ist, d.h. $H \not\leq \overline{H}$.

Beobachtung 1

Für $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$ akzeptiert der NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, \{q_0\}, \{q_n\})$ mit $Z = \{q_0, \dots, q_n\}$ und

$$\delta(q_i, a) = \begin{cases} \{q_{i+1}\}, & 0 \le i \le n-1 \text{ und } a = x_{i+1} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache $L(M) = \{x\}$.

Beobachtung 2

Sind $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, Q_i, E_i)$, $i = 1, 2$, NFAs mit $L(M_i) = L_i$ und $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, so akzeptiert der NFA

$$M = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta, Q_1 \cup Q_2, E_1 \cup E_2)$$

mit

$$\delta(z, a) = \begin{cases} \delta_1(z, a), & z \in Z_1 \\ \delta_2(z, a), & z \in Z_2 \end{cases}$$

die Sprache $L_1 \cup L_2$ und der NFA

$$M' = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta', Q_1, E)$$

mit

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a), & q \in Z_1 \setminus E_1, \\ \delta_1(q, a) \cup \delta_2(Q_2, a), & q \in E_1, \\ \delta_2(q, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_1 \cup E_2, & Q_2 \cap E_2 \neq \emptyset, \\ E_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache $L_1 L_2$. (Hierbei ist $\delta_2(Q_2, a) := \bigcup_{q \in Q_2} \delta_2(q, a)$.)

Beobachtung 3

Ist $M = (Z, \Sigma, \delta, Q, E)$ ein NFA mit $L(M) = L$, so akzeptiert der NFA

$$M' = (Z \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \delta', Q \cup \{q_{neu}\}, E \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) \cup \delta(Q, a), & q \in E, \\ \delta(q, a), & q \in Z \setminus E, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache L^*. (Hierbei ist $\delta(Q, a) := \bigcup_{q \in Q} \delta(q, a)$.)