

Übungsblatt 1

Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 26. 10. 2023
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 2. 11. 2023, 13:00 Uhr

Aufgabe 1 *mündlich*

Zeigen Sie, dass sich die chromatische Zahl $\chi(G)$ im Allgemeinen nicht in Abhängigkeit von der Cliquenzahl $\omega(G)$ begrenzen lässt.

Hinweis: Konstruieren Sie zu einem beliebigen Graphen G mit $m \geq 1$ Kanten wie folgt einen Graphen H mit $\omega(H) = \omega(G)$ und $\chi(H) = \chi(G) + 1$: H entsteht aus G , indem zu G ein neuer Knoten x und für jeden Knoten u in $V(G)$ ein Doppelgänger u' mit $N_H(u') = N_G(u) \cup \{x\}$ hinzugefügt wird.

Aufgabe 2 *mündlich*

- Finden Sie für jedes $k \geq 2$ beliebig große zusammenhängende Graphen G mit $\Delta(G) = k$, bei deren Eingabe greedy-color mindestens $n(G)/(k+1)$ Knoten die Farbe $k+1$ gibt.
- Modifizieren Sie greedy-color so, dass er für jeden zusammenhängenden Graphen G eine $(\Delta(G)+1)$ -Färbung c berechnet, die höchstens einem Knoten u eine Farbe $c(u) > \deg(u)$ gibt

Aufgabe 3 *mündlich*

Wieviele Kanten hat ein ebener Graph mit n Knoten, wenn jedes seiner Gebiete von d Kanten begrenzt ist?

Aufgabe 4 *mündlich*

Sei $G = (V, E)$ ein *maximal planarer* Graph (d.h. G ist planar und $G \cup e$ ist für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ nicht planar) und sei H eine ebene

Realisierung von G . Zeigen Sie:

- Falls G $n \geq 3$ Knoten hat, wird jedes Gebiet g von H von $d(g) = 3$ Kanten umrandet und somit ist $m = 3n - 6$.
- Falls $n \geq 4$ ist, hat jeder Knoten $u \in V$ einen Grad $\deg(u) \geq 3$ und mindestens 4 Knoten haben einen Grad ≤ 5 . *Hinweis:* Verwenden Sie (a).
- Falls $n \geq 3$ ist, gibt es für jedes Gebiet g von H eine Einbettung von H in die Ebene, in der g das äußere Gebiet ist und jedes andere Gebiet g' von H ein Dreieck bildet.
Hinweis: Führen Sie Induktion über n und benutzen Sie, dass jedes überschneidungsfreie Polygon P mit höchstens 5 Eckpunkten einen Punkt A in seinem Innern enthält, von dem aus jeder Punkt B in P sichtbar ist (d.h. die Strecke $[AB]$ verläuft innerhalb von P ; Problem der Museumswächter).
- Jeder planare Graph ist geradlinig in die Ebene einbettbar.

Aufgabe 5 *mündlich*

Zwei Graphen G und H heißen *homeomorph*, falls Unterteilungen G' von G und H' von H existieren mit $G' \cong H'$.

- Geben Sie einen Graphen an, der K_5 zwar als Minor, aber keinen zu K_5 homeomorphen Teilgraphen enthält.
- Geben Sie einen Graphen an, der nicht planar und nicht zu K_5 oder $K_{3,3}$ kontrahierbar ist.
- Zeigen Sie: Jeder Minor H von G mit $\Delta(H) \leq 3$ ist auch ein topologischer Minor von G .

Aufgabe 6 *10 Punkte*

- Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen planaren Graphen G eine 5-Färbung berechnet. (*Hinweis:* Orientieren Sie sich an dem Beweis des 5-Farben-Satzes; siehe Vorlesung.)
- Wieviele Farben benutzt Ihr Algorithmus höchstens für dreiecksfreie Graphen G (d.h. $\omega(G) \leq 2$)?