Übungsblatt 9

Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 21. 12. 2023
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 11. 1. 2024, 13:00 Uhr

Aufgabe 38 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Dinitz das Problem, für einen bipartiten Graphen $G = (U, W, E)$ ein Matching maximaler Größe zu berechnen, unter Verwendung von blockfluss1 in Zeit $O((n + m)\sqrt{\mu})$ löst.

Hinweis: Transformieren Sie G in ein Netzwerk N, das genau dann einen Fluss f der Größe $|f| = a$ besitzt, wenn es in G ein Matching der Größe $|M| = a$ gibt, und nutzen Sie die spezielle Struktur der zugehörigen Schichtnetzwerke, um die in der Vorlesung bewiesene Laufzeitschranke von $O((n + m)\sqrt{n})$ auf $O((n + m)\sqrt{\mu})$ zu verbessern.

Aufgabe 39 ***mündlich***

Beweisen Sie den Heiratssatz: Ein bipartiter Graph $G = (U, W, E)$ besitzt genau dann ein Matching M der Größe $|M| = |U|$, wenn $|N(A)| \geq |A|$ für jede Teilmenge $A \subseteq U$ gilt.

Hinweis: Folgen Sie dem Hinweis zu Aufgabe 38 und benutzen Sie das Max-Flow-Min-Cut-Theorem.

Aufgabe 40 Sei $G = (V, E)$ ein azyklischer Digraph. ***10 Punkte***

(a) Zeigen Sie, dass für jede Menge $M = \{P_1, \ldots, P_k\}$ von disjunkten Pfaden P_i (d.h. je zwei Pfade in M haben keine gemeinsamen Knoten) in G, die alle Knoten überdecken, die Gleichheit $n = k + |E_M|$ gilt, wobei $E_M = \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i)$ die Menge aller Kanten in M und $|E_M| = \sum_{i=1}^{k} \ell(P_i)$ die Summe der Pfadlängen ist.

(b) Reduzieren Sie das Problem, für G eine möglichst kleine Menge von disjunkten Pfaden zu finden, die alle Knoten überdecken, auf ein Flussproblem.

Hinweis: Erweitern Sie den Digraphen $G_0 = (V', E_0)$ mit $V' = \{s, t\} \cup \{u', u'' \mid u \in V\}$ und $E_0 = \{(s, u'), (u'', t) \mid u \in V\}$ zu einem Netzwerk $N_G = (V', E', s, t, c)$ mit Kanten der Form (u', v''), so dass jeder Fluss f in N_G zu einer Menge M von disjunkten Pfaden in G mit insgesamt $|E_M| = |f|$ Kanten korrespondiert.

(c) Lösen Sie (b), falls die gesuchten Pfade nicht disjunkt sein müssen.

Hinweis: Erweitern Sie G_0 zu einem Netzwerk $N'_G = (V', E'', s, t, c_{min})$ mit Mindestkapazitäten und Kanten der Form (u'', v') und (u', u''), so dass jeder Fluss f in N'_G zu einer Menge M_f von $|f|$ Pfaden korrespondiert, die alle Knoten überdecken.