

Übungsblatt 11

*Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 1. 2. 2024
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 8. 2. 2024, 13:00 Uhr*

Aufgabe 44

mündlich

Für eine n -köpfige Reisegruppe stehen genau n Hotelzimmer zur Verfügung. Jede Person i hat eine bestimmte Vorstellung vom Wert jedes Zimmers j , die sie in Form von Präferenzwerten $g(i, j)$ ausdrückt, wobei die Differenz $g(i, j) - g(i, j')$ in etwa dem Aufpreis entspricht, den Person i für Zimmer j im Vergleich zu Zimmer j' zahlen würde.

- (a) Finden Sie einen Algorithmus A , der jeder Person i ein Zimmer $\pi(i)$ mit dem Ziel zuweist, die Summe $\sum_{i=1}^n g(i, \pi(i))$ der Präferenzen aller Reisenden zu maximieren.
- (b) Finden Sie einen Algorithmus B , der für jedes Zimmer j einen Preis $p(j)$ ermittelt, so dass keine Person i ein anderes Zimmer bevorzugen würde (d.h. für alle i, j gilt $g(i, \pi(i)) - p(\pi(i)) \geq g(i, j) - p(j)$).
Hinweis: Berechnen Sie eine Preisfunktion p , so dass $g^p(i, j) \leq 0$ und $g^p(i, \pi(i)) = 0$ für alle i, j gilt.

Aufgabe 45

mündlich

- (a) Zeigen Sie, dass es zu jedem OSC S in einem Graphen G eine Knotenüberdeckung U mit $|U| \leq 2w(S)$ gibt. Ist diese Schranke scharf?
- (b) Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der in einem gegebenen Graphen G eine Knotenüberdeckung U findet, die höchstens doppelt so groß wie eine minimale Knotenüberdeckung U' ist.

Aufgabe 46

10 Punkte

- (a) Finden Sie einen Algorithmus A , der für einen bipartiten Graphen $G = (U, W, E, k)$ mit Kostenfunktion $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$ in Zeit $O(mn \log n)$ für $i = 1, \dots, \mu(G)$ ein kostenminimales Matching M_i der Größe i berechnet.

Zudem soll A für jedes Matching M_i eine Preisfunktion p_i berechnen, so dass die reduzierten Kosten $k^{p_i}(u, w)$ für alle Kanten $\{u, w\} \in E$ nichtnegativ sind und für alle $\{u, w\} \in M_i$ den Wert 0 haben.

- (b) Beschreiben Sie die Arbeitsweise Ihres Algorithmus bei Eingabe des folgenden Graphen $G = (U, W, E, k)$:

